AS REPRESENTAÇÕES INTEGRAIS E O ENSINO DE MATEMÁTICA NAS LICENCIATURAS EM FÍSICA: UM EXEMPLO SIMPLES BASEADO EM OBSERVAÇÕES EXPERIMENTAIS

The Integral Representations and the Mathematics Education in Physics Teacher Courses: A Simple Example Based in Experimental Observations

Daniel A. Palma(1), Maria Stella N. Oliveira(2), Vitor L. B. de Jesus(1)
1)Centro Federal de Educação Tecnológica de Química de Nilópolis/RJ
2) Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

RESUMO

É comum nas instituições de ensino superior onde são oferecidos cursos de licenciatura em física serem oferecidas três ou quatro disciplinas de cálculo diferencial e integral, além de uma disciplina de cálculo vetorial e geometria analítica. Mesmo com essa carga de disciplinas de matemática, assuntos importantes para o futuro professor não são abordados, sendo vistos apenas em cursos pós-cálculo, comuns em cursos de bacharelado em física. No presente artigo será discutido o pêndulo simples. Um assunto comumente lecionado no ensino médio, abordado com mais detalhes nos cursos superiores de física e engenharia, mas que aqui se apresenta com uma abordagem matemática um pouco mais sofisticada. Pretende-se mostrar o ganho que existe na discussão desse exemplo com um aprendizado adicional de matemática, comparando os resultados obtidos utilizando um experimento de baixo custo, realizável em qualquer laboratório didático de física, com as diferentes aproximações matemáticas propostas.

Palavras-chave: representações integrais, pêndulo simples, experimento de baixo custo

ABSTRACT

It is very common to have in physics teacher courses offered in high level institutions three or four disciplines of differential and integral calculus, an analytical geometry and a vectorial calculus disciplines. Even with this number of mathematics disciplines, some important subjects to form the background of the future physics teachers are not seen, being treated only in pos-calculus courses, offered almost exclusively in bachelor physics courses. In the present paper it is discussed the simple pendulum. A very common topic given in high school level, treated with more details in university courses of physics and engineering, but in this paper it is discussed in a more sophisticated mathematical approach. One intends to show how much can be gained in a discussion of this example with a little additional learning of mathematics, and to compare the obtained results using *a low cost experiment, easy to set up in any didactical physics laboratory, with the different proposed mathematical approximations.*

Key-words: integral representations, simple pendulum, low cost experiment.

INTRODUÇÃO

É fato que existe uma grande uniformidade nos currículos dos cursos de licenciatura em física oferecidos nas universidades brasileiras. A partir do momento em que os Centros de Educação Tecnológica foram incentivados e adicionados ao quadro de instituições de nível superior habilitadas a oferecer licenciaturas, novas estruturas de cursos vêm sendo propostas. O CEFET Química de Nilópolis veio contribuir em 2004, quando ingressou a primeira turma de licenciandos em física. A estrutura das disciplinas do curso segue o padrão de três disciplinas de cálculo diferencial e integral tradicionais e uma disciplina de geometria analítica que, em sua ementa, contempla os assuntos relacionados ao cálculo vetorial. Um dos diferenciais do curso de licenciatura, especificamente no que diz respeito à matemática, é a inserção de uma disciplina de pré-cálculo e outra cujo nome é "Tópicos Complementares de Matemática". Vale a pena observar que a matriz curricular visa, no primeiro curso, nivelar o conhecimento dos alunos iniciantes e, no segundo, fornecer um ganho de conhecimento com técnicas matemáticas mais elegantes.

As disciplinas relacionadas ao cálculo integral e diferencial geralmente são tratadas de forma distinta quando oferecidas em cursos de graduação destinados à formação de professores e de pesquisadores. No caso das ciências físicas, essa diferenciação pode ser percebida a partir do número de disciplinas destinadas ao ensino de matemática nos cursos de licenciaturas e de bacharelado. É habitual as disciplinas de cálculo serem comuns a ambos, sendo cursos com pós-cálculo reservados apenas a estudantes que desejam seguir a carreira de pesquisa básica e/ou aplicada em níveis mais avançados, como em cursos de pós-graduação em níveis de mestrado e doutorado.

O objetivo do presente trabalho é relatar, a partir de experiências com alunos dos cursos técnicos integrados e das licenciaturas em física e química existentes no CEFET Química de Nilópolis, como um conhecimento adicional de técnicas matemáticas acarreta, numa riqueza muito maior, o detalhamento de certos fenômenos, sejam eles no âmbito teórico ou experimental. Para isso, será abordado, como exemplo, o pêndulo simples. Quer-se demonstrar que, com um pequeno aumento no realismo na descrição de certos sistemas, as formulações matemáticas se tornam muito mais complexas e muitas vezes não se têm soluções analíticas para o problema, o que não quer dizer que os mesmos não sejam discutíveis e interessantes para o licenciando em física. Esse conhecimento adicional será extremamente útil para a atuação profissional, levando o futuro professor a ter uma visão mais crítica dos fenômenos que irá ensinar.

AS REPRESENTAÇÕES INTEGRAIS E O ENSINO DE MATEMÁTICA NAS LICENCIATURAS EM FÍSICA

A modelagem de fenômenos naturais muitas vezes é realizada a partir de relações de taxas de variação entre quantidades envolvidas em um determinado processo, resultando em equações diferenciais que podem ser solucionadas utilizando-se diferentes métodos, sejam eles analíticos ou numéricos (MACHADO, 2004). As equações diferenciais aparecem praticamente em todas as ciências: física, química, economia, entre outras.

Em muitas situações, a solução de uma determinada equação diferencial não possui uma solução analítica, ou seja, não possui uma forma fechada. Quando isso ocorre, é comum escrever a solução desta equação em forma de uma quadratura ou, em outras palavras, de uma integral definida. Algumas dessas integrais aparecem com tanta freqüência em problemas de física e engenharia que recebem nomes especiais, sendo conhecidas como funções especiais ou representações integrais. Essas representações integrais são muito estudadas, tendo sido tabeladas e sumarizadas na literatura (GRADSHTEYN e RYZHIK, 1994).

Nesta seção, são apresentadas e exemplificadas algumas situações físicas simples, cujo estudo dessas representações integrais apresentaria um grande ganho para o licenciando em física, contribuindo para o enriquecimento de suas aulas com novos conhecimentos e metodologias.

FUNÇÃO ESPECIAL	REPRESENTAÇÃO INTEGRAL	SITUAÇÃO FÍSICA REAL ONDE A FUNÇÃO APARECE
Função Gama	$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$	Cálculo do calor específico de sólidos a partir do modelo de Debye (Oliveira e de Jesus, 2005).
Função Erro	$erf(z)=\int_0^z e^{-t^2}dt$	Cálculo do número de moléculas que tem uma componente X de sua velocidade maior que um valor mínimo (Oliveira e de Jesus, 2005).
Função Beta	$B(z,\xi)=\int_0^1 (1-t)^{\xi-t}\, t^{z-1}dt$	Cálculo do período de osciladores sujeitos a potencias do tipo $\lvert x\rvert^n$ (Oliveira, 2005).
Integrais de Fresnel	$C(z)=\int_0^z \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right)dt$ $S(z)=\int_0^z \sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right)dt$	Estudo da difração da luz (Oliveira, 2005).

Tabela1: Situações físicas reais em que o licenciando pode ser apresentado às representações integrais

UM EXEMPLO PRÁTICO: O PÊNDULO SIMPLES E AS INTEGRAIS ELÍPTICAS DE PRIMEIRA ESPÉCIE

O pêndulo simples é um dispositivo, constituído por um corpo preso à extremidade de um cordão de massa desprezível quando comparado ao corpo (TIPLER, 2000). Uma descrição histórica desse importante aparato pode ser encontrada na literatura (BAZIN e LUCIE, 1981). A figura 1 exemplifica um pêndulo simples de comprimento l, sendo m a massa do corpo.

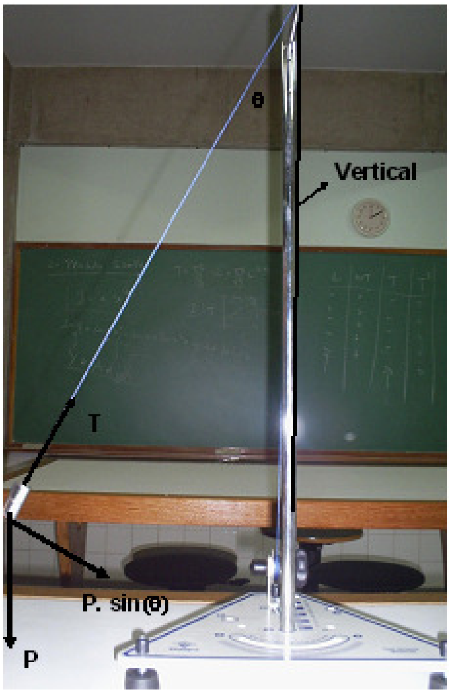

Figura 1: O pêndulo simples.

No instante mostrado, o fio faz um ângulo θ com a vertical. As forças que atuam no corpo são o peso mg e a tração na corda T. O movimento será em torno de um arco de círculo de raio l; por isso, escolheremos um referencial em que um dos eixos seja radial e o outro, tangente ao círculo. O peso mg pode ser decomposto numa componente radial de módulo $mg\cos\theta$ e numa componente tangencial $mgsen\theta$. A componente radial da resultante é a força centrípeta que mantém o corpo na trajetória circular. A componente tangencial é a força restauradora, cujo sinal negativo indica que F se opõe ao aumento de θ.

A partir das decomposições das forças envolvidas no problema, juntamente à segunda lei de Newton, nos é permitido escrever a seguinte equação de movimento, associada ao pêndulo simples:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}sen\theta = 0. \qquad (1)$$

Devido à presença da função seno, vê-se que essa equação é não-linear e não pode ser resolvida analiticamente, embora existam técnicas que nos permitem estudar o comportamento de um dado sistema regido por uma equação diferencial sem necessariamente resolver esta equação.

Didaticamente, o pêndulo simples é estudado, inclusive, no ensino superior, considerando-se ângulos pequenos em que a aproximação $sen\theta \approx \theta$ é válida. Nessa aproximação, a equação (1) toma a forma de um oscilador harmônico simples, cuja solução é dada por $\theta(t) = \cos(\omega t + \delta)$, em que ω é a velocidade angular e δ é uma constante de fase determinada a partir das condições iniciais do sistema. O aluno é formalmente apresentado ao estudo das equações diferenciais ordinárias em torno do terceiro ou quarto período das licenciaturas, se a instituição oferece ou não a disciplina de pré–cálculo.

Consideremos agora a situação em que um aluno pergunta ao seu professor de física, no laboratório didático, porque não pode "soltar" o pêndulo da altura que quiser. Será que a resposta "porque senão a medida dá errada" é correta ou pelo menos satisfatória? Não menos interessante é o estudo das oscilações para qualquer ângulo, em que o período de oscilação depende da amplitude do próprio ângulo de maneira não trivial (WATARI, 2003), (MACHADO, 2004).

A equação (1) foi explorada de maneira muito elegante por Beléndez (BELENDÉZ *et. al.*, 2007) que demonstrou que o período de oscilação τ do pêndulo para um ângulo arbitrário de soltura $\theta_{\max}$ e pode ser escrito a partir da integral:

$$\tau = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-x^2y^2)}}dx. \qquad (2)$$

onde são definidos

$$x = \frac{sen(\theta/2)}{sen(\theta_{\max}/2)} \qquad (3)$$

e

$$y = sen\left(\theta_{\max}/2\right) \qquad (4)$$

A representação integral (2) que aparece na expressão do período do pêndulo é conhecida como a *integral elíptica de primeira espécie completa* (GRADSHTEYN e RYZHIK, 1994). Essa função se encontra tabelada em muitos manuais, sendo de fácil implementação computacional. Uma vez calculada essa integral de forma exata, o período de oscilação do pêndulo está definido por:

$$\tau = 4\sqrt{\frac{l}{g}}K\left(y\right) = 4\sqrt{\frac{l}{g}}K\left[sen\left(\theta_{\max}/2\right)\right]. \quad (5)$$

A função integral elíptica de primeira ordem $K\left(y\right)$ possui a seguinte representação gráfica:

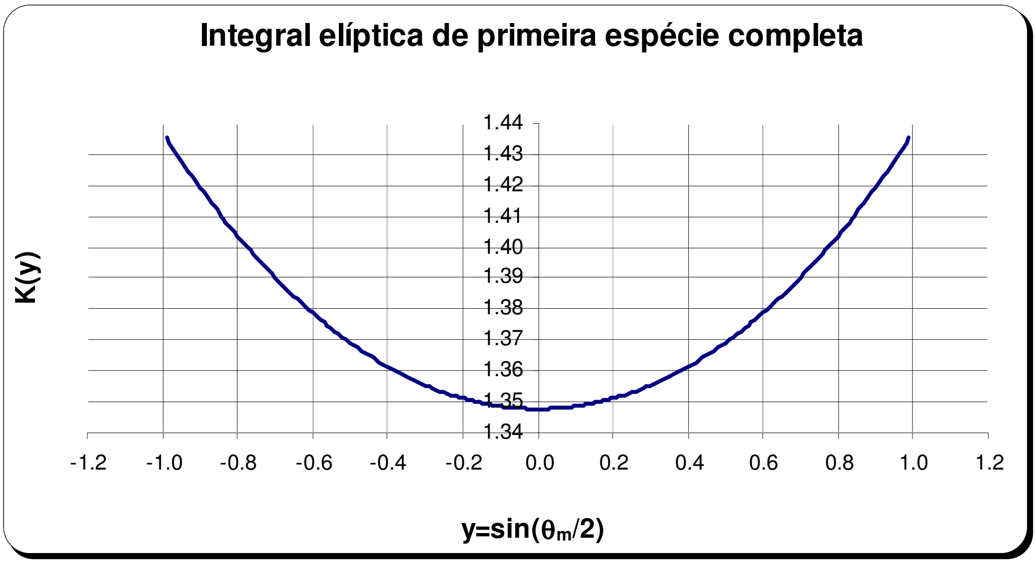

Figura 1: gráfico da integral elíptica de primeira espécie completa para $y = sen\left(\theta_{\max}/2\right)$.

Fisicamente, o período do pêndulo para diferentes condições iniciais pode ser representado para o caso particular de $l = 0.45m$ e $g = 9.78m/s^2$, graficamente, da seguinte maneira:

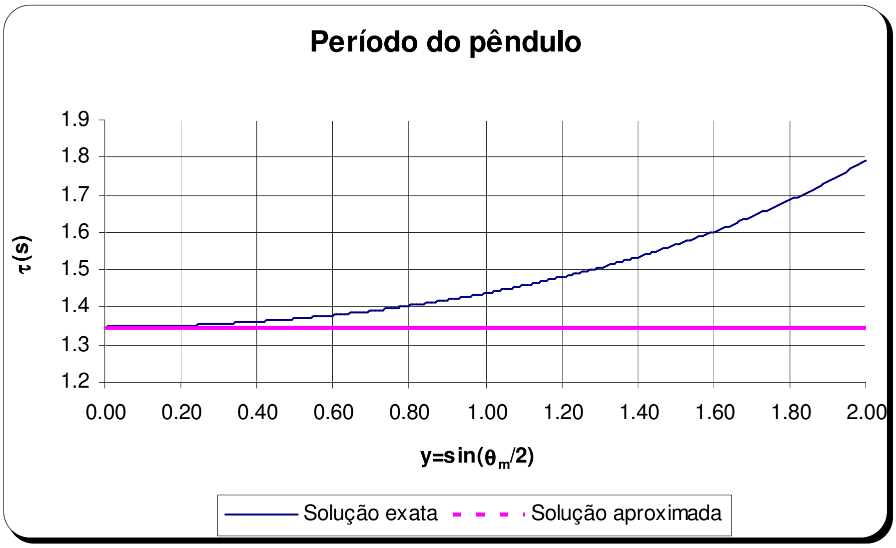

Figura 2: período do pêndulo em função de $y = sen\left(\theta_{max}/2\right)$ em radianos .

A partir do gráfico na figura 2, pode-se concluir que o período do pêndulo depende do ângulo inicial. Uma outra abordagem interessante e aplica-se o conceito de aproximação de uma função por séries de potência. O estudo das séries de Taylor (OLIVEIRA e MAIORINO, 2003) que o licenciando aprende na disciplina de cálculo III do CEFET Química de Nilópolis é importante para o licenciando porque permite a obtenção de correções da teoria original que se fazem necessárias a partir do momento em que se consideram fenômenos mais realistas.

Vamos considerar agora que um aluno vá mais longe e faça a seguinte declaração: "estou convencido da dependência do período com a condição inicial, mas qual é o meu erro (no sentido de discrepância com o valor medido)?" Como este "meu erro" depende do ângulo em que solto meu pêndulo? Para responder a esta pergunta partiremos da expressão (9), expandindo o integrando em séries Taylor já que o fator $x^2y^2 \ll 1$:

$$\frac{1}{\sqrt{\left(1-x^2y^2\right)}} = 1 + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{3x^4y^4}{8} + \ldots.. \qquad (6)$$

Com isso, utilizando a equação (2), o período do pêndulo pode ser separado da seguinte maneira:

$$\tau = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\left[\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)}} + \frac{y^2}{2}\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)}} + \frac{3y^4}{8}\int_0^1 \frac{x^4dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)}} + \ldots\right]. \qquad (7)$$

Pela forma dos integrandos e pelos limites de integração, a melhor técnica a ser utilizada é a substituição trigonométrica, que é vista por todos os licenciandos ainda na disciplina de Cálculo I. Resolvendo cada integral separadamente pode-se escrever

$$\tau = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\left[\frac{\pi}{2}+\frac{y^2}{2}\frac{\pi}{4}+\frac{3y^4}{8}\frac{3\pi}{16}+...\right]. \quad (8)$$

Rearranjando os termos na equação (8) tem-se que o período de oscilação toma a seguinte forma:

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1+\frac{y^2}{4}+\frac{9y^2}{64}+...\right] \quad (9)$$

A partir da equação (9) é fácil ver que o período do pêndulo geral é igual ao período do pêndulo para pequenas oscilações mais termos corretivos. Lembrando que $y = sen\left(\theta_{\max}/2\right)$ e a expansão da função seno é dada por

$$sen\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-...., \quad (10)$$

pode-se escrever o período de oscilação do pêndulo como

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1+\frac{1}{16}\theta^2{}_{\max}+\frac{11}{3072}\theta^4{}_{\max}+\frac{25}{18432}\theta^6{}_{\max}...\right]. \quad (11)$$

O resultado expresso pela série de potências (11) nos mostra que as correções vão diminuindo continuamente. Sempre que for necessário determinar o período do pêndulo com uma precisão maior, basta adicionar mais um termo da expansão, tendo como erro o termo seguinte.

RESULTADOS

A título de exemplo, consideremos um pêndulo com comprimento $l = 0.45m$ oscilando na superfície da terra e como aceleração da gravidade módulo igual a $g = 9.78m/s^2$.

ÂNGULO INICIAL	PERÍODO DO PÊNDULO			
θ (^{o} ou rad)	**Aproximação para pequenas oscilações (s)**	**Primeira correção (s)**	**Segunda correção (s)**	**Medido experimentalmente (s)**
5 ± 1 ou π/36 ± π/180	1,3478 ± 0,015	1,3484 ± 0,015	1,3484 ± 0,015	1,323 ± 0,025
30 ± 1 ou π/6 ± π/180	1,3478 ± 0,015	1,3709 ± 0,021	1,3712 ± 0,022	1,365 ± 0,022
60 ± 1 ou π/3 ± π/180	1,3478 ± 0,015	1,4401 ± 0,034	1,4459 ± 0,038	1,439 ± 0,021
90 ± 1 ou π/2 ± π/180	1,3478 ± 0,015	1,5556 ± 0,049	1,5850 ± 0,061	1,523 ± 0,021

Tabela 2: Período de oscilação do pêndulo para diferentes valores do ângulo inicial.

A tabela 2 mostra, na primeira coluna, os valores medidos para os diferentes ângulos máximos e suas incertezas associadas. As três colunas seguintes mostram os respectivos valores dos períodos, utilizando a equação (11) para pequenas oscilações, primeira e segunda correções, respectivamente, e suas incertezas, levando-se em conta a incerteza de cada variável associada neste cálculo (MENDES e ROSÁRIO, 2005). A última coluna mostra os valores dos períodos associados a cada ângulo, medidos diretamente, utilizando somente um cronômetro digital.

Observando a tabela 2, percebemos que, gradativamente, os valores experimentais das medidas diretas do período de oscilação do pêndulo (quinta coluna) vão se afastando do valor do período para pequenas oscilações (segunda coluna), conforme o gráfico mostrado na figura 2. Comparando os valores experimentais do período com aqueles utilizando as correções de primeira ordem (terceira coluna) e segunda ordem (quarta coluna), verificamos que os valores estão em bom acordo entre si. Essas medições mostram que, utilizando somente a correção de primeira ordem, pode-se chegar ao valor do período do pêndulo razoavelmente próximo daquele obtido por medida direta, levando-se em conta as condições experimentais descritas neste trabalho. Nossa precisão experimental é insuficiente para perceber diferenças nas correções entre primeira e segunda ordem, mesmo observando que, à medida que o ângulo inicial aumenta, as diferenças são mais perceptíveis e, para ângulos próximos de 90 graus, a diferença aparece já na segunda casa decimal, onde ainda temos um algarismo duvidoso em nossas medidas experimentais diretas. Cabe aqui comentar que é necessária uma precisão maior, que só poderá ser obtida por outros métodos de medição um pouco mais sofisticados, por exemplo, utilizando-se um contador de disparo automático. É interessante perceber que, utilizando-se somente a correção de primeira ordem e um experimento simples e de baixo custo, os resultados são muito bem explicados e satisfazem à curiosidade daqueles que, em qualquer experimento como esse, se perguntam por que devemos soltar o pêndulo somente para ângulos pequenos e não para qualquer ângulo desejado.

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Observa-se que um pequeno esforço no entendimento de técnicas avançadas de matemáticas pode gerar um grande avanço no entendimento dos conceitos físicos e um melhor entendimento de situações físicas descritas com um pouco mais de realismo. O pêndulo simples, como muitos outros sistemas físicos, deve ser muito bem entendido por qualquer estudante que pretende se tornar professor de física. Esse entendimento não pode ser limitado a uma equação aproximada, limitando o futuro professor não só do ponto de vista teórico, mas também do ponto de vista experimental, dentro de um laboratório de ensino, onde a simples pergunta de um aluno "por que não podemos soltar o pêndulo de qualquer ângulo?" pode deixar o professor sem uma resposta também simples, que pode ser elucidada com um experimento barato e de fácil montagem, que é soltar o pêndulo de ângulos maiores e verificar que realmente os valores experimentais divergirão do valor teórico devido a uma aproximação matemática feita logo no início do problema proposto. Esse professor tem de saber que tal experimento é limitado a ângulos pequenos, para que se obtenham valores experimentais compatíveis com a aproximação descrita nos livros didáticos.

É interessante lembrar que esse experimento é de baixo custo e altamente elucidativo para licenciandos em física, sendo proposto em nosso curso de Tópicos Contemporâneos de Matemática, fazendo-se assim a conexão entre o refinamento teórico e a física experimental simples e de baixo custo. Após um experimento como esse, os licenciandos podem discutir pontos interessantes, como precisão experimental, comparação entre resultados experimentais e teóricos e entender, com mais profundidade, conceitos, como expansão em séries, levando a interpretação desses termos como corretivos que podem, de acordo com a precisão experimental, ser utilizados até uma determinada ordem para explicar o resultado experimental.

Em muitos casos, estudantes acreditam que, para se obter um resultado preciso, é necessário utilizar-se vários termos corretivos, o que, conforme mostrado neste artigo, não é verdade para uma grande gama de experimentos. Acreditamos que a formação do licenciando em física não deve ser a de um especialista em um determinado ponto ou área dos conteúdos de física, mas sim uma formação ampla e balanceada entre os conteúdos teórico e experimental da disciplina que irá lecionar.

REFERÊNCIAS

BAZIN, M, LUCIE, P., Porque e como estudar "o pêndulo simples" no laboratório básico. *Revista brasileira de ensino de física*, p. 3, março de 1981.

BELÉNDEZ, A., PASCUAL, C., MÉNDEZ, D. I., BELÉNDEZ, T., NEIPP, C., Exact solution for the nonlinear pendulum. *Revista brasileira de ensino de física*, v. 29, n.4, p. 645-648, 2007.

GRADSHTEYN, I. S., RYZHIK, I. M., *Table of integrals, series and products*. San Diego: Academic Express, 5^0 edição, 1994. 895 p.

http://www.cefeteq.br/superior/lic_fis/index.htm, acessado em 05/11/2008.

MACHADO, K. D., *Equações diferenciais aplicadas à física*. Ponta Grossa: UEPG, 2^0 edição, 2004. 340 p.

MENDES, A., ROSÁRIO, P. P., *Metrologia e Incerteza de Medição*. Rio de Janeiro: Epse, 2005. 67 p.

OLIVEIRA, I. S., DE JESUS, V. L. B., *Física do Estado Sólido*. São Paulo: Livraria da Física, 1º edição, 2005. 187 p.

OLIVEIRA, E. C., MAIOLRINO, J. E., *Introdução aos métodos da matemática aplicada*. Campinas: Unicamp, 2^0 edição, 2003. 128 p.

TIPLER, P. A., *Física, volume 1*. Rio de Janeiro: LTC, 4^0 edição, 2000. 76 p.

WATARI, K., *Mecânica clássica, volume 2*. São Paulo: Livraria da Física, 1^0 edição, 2003. 162 p.