

# A INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA COMO ESTRATÉGIA DE ENSINO E APRENDIZAGEM: UMA PESQUISA EM UM CURSO TÉCNICO

## *MATHEMATICAL INVESTIGATION AS LEARNING AND TEACHING STRATEGY: A RESEARCH IN A TECHNICAL COURSE*

**Denis Cezar Martins**<sup>1</sup> [deniscmartins@hotmail.com]

**Rudolph dos Santos Gomes Pereira**<sup>2</sup> [rudolphsantos@uenp.edu.br]

**Bárbara N. Palharini**<sup>3</sup> [barbara.palharini@uenp.edu.br]

<sup>1</sup>*Serviço Nacional de Aprendizagem Industrial, Rua José Vieira de Gusmão, 850, Trevo Povoado da Platina, Santo Antônio da Platina, Paraná, CEP. 86.430-000.*

<sup>2,3</sup>*Universidade Estadual do Norte do Paraná, Colegiado de Matemática, Rua Portugal, 340, Centro, Cornélio Procópio, Paraná, CEP: 86.300-000.*

### RESUMO

Este artigo tem como objetivo analisar uma tarefa de investigação matemática desenvolvida por alunos de um curso técnico. A atividade foi proposta e desenvolvida na tentativa de auxiliar os alunos desta modalidade de ensino, os quais apresentam dificuldades na utilização de conceitos matemáticos aliados a problemas da sua área de atuação. Os dados foram coletados por meio de uma situação aberta, uma tarefa contextualizada envolvendo o conteúdo de área e perímetro. A análise de dados se deu de modo qualitativo de acordo com a análise textual discursiva. Evidenciamos a contribuição da investigação matemática na análise, interpretação e solução de problemas advindos da realidade de cursos técnicos. A investigação matemática é tida não apenas como estratégia de ensino, mas, também, como possibilidade de aprendizagem por meio do levantamento de conjecturas, testes e reformulações, que neste caso possibilitou aos alunos a compreensão dos conceitos de área e perímetros por meio de uma situação cotidiana de profissionais quando da fabricação de materiais e dispositivos de segurança que são situações cotidianas do seu ambiente de trabalho.

**PALAVRAS-CHAVE:** investigação matemática; área e perímetro; pesquisa qualitativa; análise textual discursiva.

### ABSTRACT

*This paper aims to analyze an investigative mathematical task developed by technical course students'. The activity was developed in an attempt to help the students of this type of education, which have difficulties in using mathematical concepts inside specific problems. Data were collected through a task of open nature, a contextualized task involving the content area and perimeter. The data analysis was qualitatively according*

---

DOI: 10.22407/2176-1477.2017v8i1.583

Recebido em: 20/01/2016 Aprovado em: 04/07/2017 Publicado em: 01/09/2017

*to the discursive textual analysis. We noted the contribution of mathematical investigation in the analysis, interpretation and problem solving arising from the reality of technical courses. Mathematics investigation is seen not only as a teaching strategy, but also as a possibility of learning through conjectures, which in this case enabled students to understand the concepts of area and perimeters through a daily situation of professionals when manufacturing materials and safety devices that are everyday situations of their work environment.*

**KEYWORDS:** *mathematical investigation; area and perimeter; qualitative research; discursive textual analysis.*

## INTRODUÇÃO

A prática do ensino de Matemática como uma disciplina cujos conteúdos aparecem como conhecimentos criados por mentes geniais, vem há muito tempo distorcendo o seu objetivo. Mais do que transmitir informações e ensinar técnicas, a Matemática visa colaborar para aumentar a capacidade do estudante de compreender o mundo a sua volta.

Em uma época de acesso fácil e rápido a novas e antigas informações, cresce a importância de se trabalhar a construção de conhecimentos pelos alunos, possibilitando a estes o desenvolvimento de saberes inerentes ao processo de aprendizagem. Saber como interpretar um problema, levantar hipóteses, testar conjecturas e avaliar resultados são habilidades importantes, tanto nos meios acadêmicos como nas indústrias, comércios, agronegócios ou serviços.

É imprescindível que o estudante se aproprie do conhecimento de forma que “compreenda os conceitos e princípios matemáticos, raciocine claramente e comunique ideias matemáticas, reconheça suas aplicações e aborde problemas matemáticos com segurança” (LORENZATO e VILA, 1993: 41).

A ideia de tornar o aluno responsável por sua aprendizagem, pode ser uma das interpretações quando do estudo dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). Os PCN (Brasil, 1998) reafirmam a importância de possibilitar a descoberta de regularidades pelos alunos, bem como no reconhecimento de propriedades aritméticas, algébricas e geométricas, pois em atividades de investigação matemática o aluno desenvolve habilidades como a intuição, a analogia, a indução e a dedução. O que é raro em atividades que privilegiam a memorização de estruturas matemáticas e que não permitem compreender o processo de dedução do conceito matemático e o reconhecimento de sua utilidade em situações cotidianas (DICK et al., 2014).

Estas habilidades podem ser desenvolvidas por meio do uso de investigações matemáticas em sala de aula, pois nas atividades investigativas buscamos criar situações em que o aluno atua como protagonista do seu aprendizado, porém mediada pelo professor. Neste sentido, concordamos com o texto das Diretrizes Curriculares orientadoras da Educação Básica do Estado do Paraná, quando diz que:

É necessário que o processo pedagógico em Matemática contribua para que o estudante tenha condições de constatar regularidades, generalizações e apropriação de linguagem adequada para descrever e interpretar fenômenos matemáticos e de outras áreas do conhecimento (PARANÁ, 2008: 49).

A investigação matemática é uma tendência metodológica da educação matemática presente nas Diretrizes Curriculares Orientadoras da Educação Básica do Estado do Paraná (DCE) para o ensino de matemática. Segundo as DCE, "Na investigação matemática, o aluno é chamado a agir como um matemático, não apenas porque é solicitado a propor questões, mas, principalmente, porque formula conjecturas a respeito do que está investigando" (PARANÁ, 2008: 67). Acreditamos que a adoção dessa postura pelo aluno, mediada pelo professor, pode contribuir para a compreensão de conhecimentos matemáticos em situações pertencentes à vida cotidiana.

Desse modo, considerando que os conteúdos de área e perímetro são tomados como pré-requisitos para o desenvolvimento da disciplina de Cálculo Técnico neste curso técnico é que pretendemos investigar a compreensão dos alunos quanto à utilização destes conteúdos em aplicações pertencentes a uma situação real, por meio de uma atividade de investigação matemática.

Uma atividade de investigação inicia-se com uma situação aberta na qual a questão não está totalmente definida, assim, cabe ao investigador (quem investiga a situação) a formulação de questões a serem analisadas e a verificação das mesmas o que contribui para o desenvolvimento da aprendizagem (BERTINI e PASSOS, 2008).

A importância da utilização da investigação matemática se dá considerando que "o envolvimento ativo do aluno é uma condição fundamental da aprendizagem. O aluno aprende quando mobiliza os seus recursos cognitivos e afetivos com vista a atingir um objetivo. Esse é, precisamente, um dos aspectos fortes das investigações" (PONTE, 2003: 23).

Assim, essa pesquisa faz-se necessário, pois diante da nossa prática pedagógica temos percebido a dificuldade dos alunos quando se trata de conteúdos matemáticos, fato que pode ser causado pelo uso excessivo de algoritmos e fórmulas sem aplicação em situações reais e que impossibilitam a investigação e a elaboração de estratégias de resolução, assim como posto por Bertini e Passos (2008).

Acreditamos que os resultados contribuirão para o ensino de matemática tendo em vista que possibilitarão reflexões sobre a compreensão de conteúdos matemáticos com o uso de atividades de investigação matemática como uma forma de reduzir o ensino pautado no uso de estruturas e operações sem interpretação e aplicação em situações cotidianas.

## **A INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA**

Durante muito tempo, investigar em Matemática estava relacionado a atividades realizadas por matemáticos, com objetivo de realizar demonstrações e descobertas de

âmbito intradisciplinar. Na maioria das vezes, estes trabalhos envolvem conceitos complexos, somente compreendidos por pesquisadores de alto nível. Diante do exposto, uma questão se presentifica: poderiam os processos investigativos presentes no surgimento de muitos conceitos matemáticos ao longo da história, ajudar no ensino e na aprendizagem de conteúdos matemáticos?

Investigar não significa necessariamente lidar com problemas muito sofisticados na fronteira do conhecimento. Significa, tão-só, que formulamos questões que nos interessam para as quais não temos resposta pronta, e procuramos essa resposta de modo tanto quanto possível fundamentado e rigoroso (PONTE et al., 2005: 9).

Nessa concepção, a investigação é vista também como uma abordagem de ensino, proporcionando um contato mais próximo do aluno com o objeto de estudo. A investigação matemática visa trabalhar os conceitos, procedimentos e representações matemáticas na perspectiva da descoberta, ainda que de forma parcial pelos estudantes, através do processo conjectura-teste-demonstração. Este procedimento de pesquisa, utilizado por matemáticos em todos os tempos, parece ser uma forma natural de encontrar respostas para diversos tipos de problemas. Os conteúdos matemáticos apresentados na sua forma sistematizada sofreram de algum modo um processo de investigação, seja durante seu desenvolvimento ou mesmo após sua efetivação. Isso aponta uma característica fundamental do processo investigativo: a capacidade de melhorar a compreensão do pesquisador sobre o assunto estudado, uma vez que este atua como construtor do conhecimento.

Sobre esta atuação destaca-se que:

Na investigação matemática, o aluno é chamado a agir como um matemático, não apenas porque é solicitado a propor questões, mas, principalmente, porque formula conjecturas a respeito do que está investigando. Assim, "as investigações matemáticas envolvem, naturalmente, conceitos, procedimentos e representações matemáticas" (PONTE et al., 2005: 23).

A investigação matemática, como tendência metodológica da educação matemática, realça a importância de apresentar o conhecimento matemático como algo que pode ser construído pelo aluno, com a devida orientação, atribuindo ao aluno o papel principal no processo de aprendizagem. O raciocínio, o levantamento de hipóteses, a observação de regularidades, a busca por evidências que apontem um caminho para a solução de um problema e a mobilização dos conhecimentos já existentes passam a fazer parte da rotina do aprendiz nas atividades investigativas.

A realização de uma investigação matemática em sala de aula pode ser estruturada em quatro momentos principais:

O primeiro abrange o reconhecimento da situação, a sua exploração preliminar e a formulação de questões. O segundo momento refere-se ao processo de formulação de conjecturas. O terceiro inclui a realização de testes e o eventual refinamento das conjecturas. E,

finalmente, o último diz respeito à argumentação, à demonstração e a avaliação do trabalho realizado (PONTE et al., 2005: 20).

Esses momentos nem sempre surgem nesta ordem ou claramente separados. Eles tendem a surgir juntos, sendo que um momento seguinte tenta completar, estruturar ou validar o anterior, podendo ser necessário voltar a um estágio inicial para aprimorar os posteriores.

O levantamento de questões, durante a fase da exploração, está diretamente ligado à natureza de uma investigação, tornando-a diferente de uma resolução de problema. Como salientam Ponte, Brocardo e Oliveira (2005), “na resolução de problemas apresentamos situações fechadas, onde o enunciado indica claramente o que é pedido”. Desse modo já existe uma solução conhecida, a qual os alunos devem chegar e recorre-se, em geral, ao uso de técnicas sistematizadas.

A perspectiva que envolve a realização de investigações matemáticas trata

[...] de situações mais abertas – a questão não esta definida no início, cabendo a quem investiga um papel fundamental na sua definição. E uma vez que os pontos de partida podem não ser exatamente os mesmos, os pontos de chegada podem ser também diferentes (PONTE et al., 2005: 23).

A visão sobre um conjunto de dados e informações varia entre indivíduos ou entre grupos de indivíduos, principalmente quando estes realizam inferências e afirmações em situações com poucas restrições. Das diversas percepções surgirão diferentes conjecturas e, testá-las, ao invés de compará-las a uma solução adotada como correta, leva o estudante a necessidade de justificar seus resultados. Isso lhe dá maior confiança para argumentar e discutir suas descobertas, com seus colegas e professor, sendo capaz de avaliar seu progresso na compreensão do assunto estudado.

Ao colocar o aluno na condição de condutor do seu raciocínio, cria-se um vínculo entre ele e o objeto de estudo. Isso tem influência direta na atitude do aluno perante a tarefa, pois o envolvimento do aluno é uma condição fundamental da aprendizagem: “o aluno aprende quando mobiliza os seus recursos cognitivos e afetivos com vista a atingir um objetivo” (PONTE et al., 2005: 23).

Ao professor cabe a importante função de auxiliar os alunos a identificar e compreender as circunstâncias em torno do conceito em estudo, propondo sua exploração por meio de questões relativas a um problema. Ele atua como motivador e questionador das iniciativas propostas pelos alunos no desenrolar do processo investigativo. Portanto, o foco do seu trabalho é orientar os alunos a: organizar as suas observações; a registrar os dados obtidos na exploração; a estabelecer as relações pertinentes e auxiliá-los na construção de conjecturas que estejam ao alcance da sua compreensão.

## PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Realizamos esta pesquisa buscando interpretar a compreensão dos alunos e apontar as possíveis contribuições do uso da investigação matemática no ensino do conteúdo de área e perímetro. Uma vez que o ensino e a aprendizagem são ações sociais dos indivíduos, seria quase impossível realizar uma “aferição” quanto à contribuição de nossa proposta em termos quantitativos. Nesta perspectiva, optamos por utilizar uma pesquisa qualitativa na qual

[...] há uma relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito, isto é, um vínculo indissociável entre o mundo objetivo e a subjetividade do sujeito que não pode ser traduzido em números. A interpretação dos fenômenos e a atribuição de significados são básicas no processo de pesquisa qualitativa. Não requer o uso de métodos e técnicas estatísticas. O ambiente natural é a fonte direta para coleta de dados e o pesquisador é o instrumento-chave (MORESI, 2003: 8-9).

Desse modo, pudemos acrescentar à interpretação dos resultados toda a experiência vivenciada pelo pesquisador durante a aplicação da tarefa, bem como apresentar o seu ponto de vista. Este tipo de análise tende a considerar o problema de pesquisa numa perspectiva ampla. Para Gerhardt e Silveira (2009) os “pesquisadores que utilizam os métodos qualitativos buscam explicar o porquê das coisas, exprimindo o que convém ser feito, mas não quantificam os valores e as trocas simbólicas”.

Acreditamos que para atingir o objetivo, necessitamos de um instrumento eficiente de análise dos textos e cálculos produzidos pelos alunos. Assim, o método escolhido foi o da análise textual discursiva. Este procedimento de análise, segundo Moraes e Galiazzi (2007) constitui-se de três momentos principais: unitarização; categorização e captação do novo emergente.

Na unitarização se processa a desconstrução do *corpus* de análise, fragmentando-o de modo a encontrar os elementos que se pretende observar no fenômeno estudo. Esta ação pode ser realizada em qualquer texto e possibilita:

[...] uma multiplicidade de leituras, leituras essas tanto em função das intenções dos autores como dos referenciais teóricos dos leitores e dos campos semânticos em que se inserem. (MORAES e GALIAZZI, 2007: 13).

Este processo de unitarização requer, conforme Moraes e Galiazzi (2007), as seguintes etapas: 1. Fragmentação dos textos e codificação de cada unidade; 2. Reescrita de cada unidade de modo que assumam um significado o mais completo possível em si mesmo e 3. Atribuição de um nome ou título para cada unidade assim produzida.

Do envolvimento com o *corpus* desconstruído surgem novas compreensões que caminham progressivamente do caos da fragmentação para a auto-organização. Assim, a

[...] impregnação persistente nas informações dos documentos do *corpus* da análise passa por um processo de desorganização e

desconstrução, antes que se possam atingir novas compreensões. É preciso desestabilizar a ordem estabelecida, desorganizando o conhecimento existente. Tendo como referência as ideias dos sistemas complexos, esse processo consiste em levar o sistema semântico ao limite do caos (MORAES, 2003: 196).

Neste momento, o pesquisador busca compreender as unidades significativas identificadas, relacionando-as entre si. Da relação de pertencer a um conjunto mais amplo de significado surge a categorização. Esta categorização representa os conjuntos de unidades que tem em comum a mesma perspectiva de análise. Assim é possível rastrear os elementos presentes no texto, relativos à intenção da pesquisa, possibilitando um olhar holístico sobre o objeto de estudo. Em nosso trabalho adotamos a categorização pelo método dedutivo que faz

[...] um movimento do geral para o particular, implica construir categorias antes mesmo de examinar o corpus de textos. As categorias são deduzidas das teorias que servem de fundamento para a pesquisa. São "caixas" (apud Bardin, 1977), nas quais as unidades de análise serão colocadas ou organizadas. Esses agrupamentos constituem as categorias a priori (MORAES, 2003: 197).

Essas categorias tem uma relação direta com o objetivo da pesquisa e com o referencial teórico utilizado e foram definidas previamente, pois conforme comenta Moraes (2003) "as categorias *a priori* correspondem a construções que o pesquisador elabora antes de realizar a análise propriamente dita dos dados". De modo geral, essas categorias são estabelecidas por meio de critérios que sejam justificáveis do ponto de vista dos objetivos da pesquisa e da natureza do fenômeno em análise.

Categorias de análise necessitam ser válidas ou pertinentes em relação aos objetivos e ao objeto da análise. Um conjunto de categorias é válido quando é capaz de representar adequadamente as informações categorizadas, atendendo dessa forma aos objetivos da análise, que é de melhorar a compreensão dos fenômenos investigados (MORAES, 2003: 199).

Em nossa pesquisa, elaboramos as categorias prévias (ou *a priori*), como também as subcategorias e unidades que, na percepção dos autores da análise seriam mais apropriadas para observar o objeto de estudo. Ao identificar essas categorias, realizamos a desconstrução do *corpus* de análise, encaixando os fragmentos dos textos num movimento de compreensão e interpretação.

As categorias e suas ramificações orientaram a produção do metatexto, objetivo principal de todo o processo, no qual o pesquisador buscará descrever o que observou, apoiando-se no seu referencial teórico e em sua experiência para expressar as novas compreensões advindas da análise.

## DESENVOLVIMENTO

A tarefa proposta foi aplicada a uma turma de alunos do 1º módulo do curso de Técnico em Eletromecânica, que é composto de quatro módulos (semestrais), cujas aulas tiveram início no segundo semestre do ano letivo de 2013.

Os alunos do curso técnico eram oriundos da rede pública de ensino que cursam ou que já concluíram o ensino médio. Estavam distribuídos da seguinte forma: 13% com o ensino médio completo, 39% cursando o terceiro ano do ensino médio e 48% cursando o segundo ano do ensino médio. Portanto, adotamos a hipótese de que esses alunos já tiveram contato com o conceito de área e perímetro, bem como as principais formas de calculá-los.

Para a realização da tarefa foram necessárias vinte horas aula, divididas em cinco encontros de quatro horas. A classe era composta de 28 alunos que foram inicialmente divididos em grupos, tendo cada um quatro membros.

Como os alunos não haviam realizado atividade de investigação matemática, abordamos primeiramente seus passos através de uma tarefa que visava à busca de regularidades em uma tabela de números. Introduzimos então as noções básicas sobre exploração, formulação de questões, conjectura, testes e avaliação, estimulando o registro escrito pelos alunos durante a atividade. A partir de então, realizamos a introdução da atividade para a turma, através de uma exposição dialogada e entrega do texto, conforme Quadro 1.

### Quadro 1 – Atividade de investigação matemática

A indústria de alimentos COMA Ltda. passa por uma fase de readequação dos seus equipamentos, com objetivo de conquistar um certificado de qualidade. Um dos principais problemas a ser solucionado refere-se à implantação de dispositivos de segurança em conjuntos mecânicos que realizam movimentos. Você atua nesta empresa na função de técnico em eletromecânica, responsável por desenvolver uma proteção para um sistema de polias de um compressor de ar. Esse sistema é composto por duas polias com diâmetro de 60mm, acopladas a uma correia, com distância entre os centros das polias de 100mm. Da face das polias até a base dos eixos são 45mm. A proteção deve impedir que objetos estranhos (porcas, arruelas, pinos, ferramentas) possam interferir no funcionamento desse sistema, inclusive não permitindo o acesso ao conjunto por meio de partes pequenas do corpo humano. Ela deve ser concebida de forma a permitir a livre movimentação dos componentes a serem protegidos. Neste projeto, é importante prever o consumo do material de fabricação, observando para isso suas formas e dimensões, que devem ser especificadas através de um esboço cotado registrando as etapas desenvolvidas para o seu projeto.

A atividade se constitui de uma situação aberta em que a questão não está definida no início o que abre caminho para a investigação dos alunos (PONTE et al., 2005). Após esse momento, foi iniciada a exploração da tarefa, registro de dados e questões, elaboração de testes e socialização dos resultados. Cada aluno produziu um conjunto de registros, porém durante todo o processo houve intensa troca de informações e

diálogo entre os alunos e entre alunos e docente. Para auxiliar os alunos em seus registros, foi elaborado um roteiro de investigação (Quadro 2), adaptado a atividade.

Na exploração, os alunos buscaram identificar os dados da situação e seus condicionantes, formulando questões e hipóteses sobre medidas, formas e cálculos que os levassem a estabelecer uma conjectura. Na conjectura, realizaram medições, cálculos, esboçaram desenhos e compararam os resultados obtidos em cada modelo proposto. Para testar suas conjecturas, confeccionaram protótipos dos modelos em tamanho real, verificando o atendimento dos requisitos da situação proposta. Também aproveitamos para revisar os conceitos matemáticos que surgiram como alternativas na solução do problema (perímetro, área e propriedades de figuras geométricas).

### Quadro 2 – Roteiro para realização da atividade

#### Exploração

- Como deve ser a proteção?
- Quais os elementos a serem protegidos?
- O que devo saber para fazer a previsão do consumo de material?

#### Levantamento de questões

Elabore uma pergunta ou uma afirmação sobre:

- A forma do produto
- As partes do produto
- As dimensões das partes do produto
- Como você pretende determinar o consumo de material para uma proteção

#### Conjectura

- Faça um esboço cotado das partes do produto
- Indique o nome das partes do produto
- Organize os dados obtidos e realize os cálculos, indicando a cada passo o que está sendo calculado e sua localização no esboço.

#### Testes e reformulação

- Construa um protótipo do produto desenvolvido
- Efetue as devidas correções

#### Justificação e avaliação

- Seu projeto atende aos requisitos da situação proposta? Explique.
- Apresente seus resultados

Por fim, os alunos comunicaram sua produção aos demais, a fim de promover um momento de interação, onde todos puderam observar diferentes trajetórias que, orientadas pelos passos da investigação matemática, possibilitaram a conscientização,

pelos alunos, do conhecimento construído. A compreensão dos conceitos matemáticos se dá, também, a medida em que os alunos comunicam os resultados obtidos no processo investigatório aos demais, e reconhecem as aplicações da matemática (LORENZATO e VILA, 1993).

## PROCEDIMENTOS DE ANÁLISE

Para a realização da análise foram escolhidas aleatoriamente cinco atividades. Estas atividades foram categorizadas, utilizando o processo da análise textual discursiva. Em acordo com os objetivos desta pesquisa, tivemos como perspectiva o uso das fases da investigação matemática e a utilização dos conceitos de área e perímetro na resolução da tarefa proposta.

Com relação à análise dos conceitos matemáticos envolvidos na tarefa de investigação matemática, consideramos como categoria prévia *Conhecimento Matemático*, tendo como subcategorias *Conceito Matemático* e *Tipos de Representação* e como unidades a *Área e o Perímetro* (unidades da subcategoria *Conceito Matemático*) e *Algébricos e Ilustrativos* (unidades da subcategoria *Tipos de Representação*).

Quanto à utilização do processo de investigação matemática, consideramos como categoria prévia *Fases da Investigação Matemática*, da qual surgem as seguintes unidades: *Exploração e formulação de questões; Conjectura; Testes e reformulação e Justificação e avaliação*.

Apresentamos abaixo os quadros contendo as categorias *Conhecimento Matemático* e *Fases da Investigação Matemática*, no qual utilizamos os códigos A1, A2, ..., A5 para representar a produção textual de cada aluno cuja atividade foi selecionada.

A categoria *Conhecimento Matemático* apresenta fragmentos textuais sobre os conceitos matemáticos envolvidos na fase de exploração, com principal atenção aos conceitos de área e perímetro. Também mostra os tipos de representação utilizados pelos alunos durante a fase de conjectura da investigação matemática.

### Quadro 3 – Subcategoria Conceito Matemático

|                |
|----------------|
| Unidade: Área. |
|                |
| Texto de A1    |

Unidade: Perímetro

③ Para saber o quanto vou gastar de material eu devo elaborar contos para saber a área da chapa frontal, área da alça, perímetro e depois somar tudo para saber a área total do meu produto.

Texto de A3

Analisando o texto de A1, podemos perceber a relação feita pelos alunos entre o conceito de área e a quantidade de material. Esta relação mostra que o conceito de área foi utilizado com uma finalidade, possuindo um significado. O conceito de perímetro, que na fase de exploração foi apresentado somente por A3, aparece como parte da solução do problema. Os demais alunos não identificaram, num primeiro momento, que poderiam recorrer a este conceito, por não haver uma relação explícita com a solução do problema. Assim, a exploração e o levantamento de questões prosseguiram após o início da fase de conjectura, levando o aluno a avaliar o que havia produzido até o momento.

#### Quadro 4 – Subcategoria Tipos de Representação

Unidade: Ilustrativa

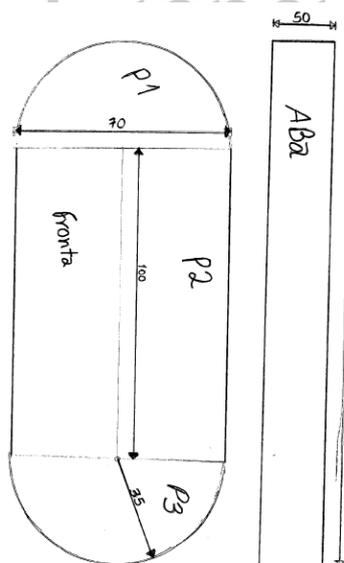


Ilustração de A5.

| Unidade: Algébrica   |  |   |  |
|--|--|---|--|
| <p>COMPRIENTO</p> $30+30+100+5+5=170 \text{ mm}$ $P_1+P_2+D+F+F=C$ | <p>Chapa Frontal</p> $170 \times 70 = 11900 \text{ mm}^2$ $L \times L = CF$ <hr/> <p>Área da aba</p> $P \times L$ $480 \times 50 = 24000 \text{ mm}^2$ <hr/> <p>Área total</p> $CF + AA = AT$ $11900 + 24000 = 35900 \text{ mm}^2$ | <p>P = Polias</p> <p>D = distância entre polias</p> <p>F = Folga</p> <p>L = Largura</p> <p>C = Comprimento</p> <p>P = Perímetro</p> | <p>Perímetro</p> $P = 70 + 70 + 100 + 100 + 100 + 100$ |
| <p>Largura</p> $5+5+60=70$ $F+F+P_{aba}=L$                         |  |   |  |
| Produção de A3.  |  |   |  |

Nesta subcategoria observamos que a representação ilustrativa foi o meio pelo qual os alunos conseguiram aproximar seu problema teórico da realidade. A visualização de um esquema tornou possível a organização e sistematização dos dados, orientando a execução dos cálculos.

A representação algébrica por sua vez, atua como descritora dos cálculos realizados, substituindo valores de grandezas e auxiliando a sequência de resolução. Também é possível observar os dados coletados pelos alunos e o tratamento realizado no sentido de dimensionar o produto e calcular sua área.

A categoria Fases da Investigação Matemática reúne fragmentos textuais relativos às informações coletadas pelos alunos a partir da leitura da tarefa, bem como os encaminhamentos sugeridos por eles para a solução do problema.

### Quadro 5 – Categoria Fases da Investigação Matemática

| Unidade: Exploração e Levantamento de Questões.   |
|---|
| <p>Exploração</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Ele deve ser concebido de forma a permitir a livre movimentação dos componentes a serem protegidos. A proteção deve impedir que objetos estranhos (povoa, ferramentas etc) prejudiquem o funcionamento das polias.</li> <li>• Duas polias com diâmetro com diâmetros de 60 mm, acopladas a uma correia, com distância entre os centros das polias de 100 mm.</li> <li>• Calcular a área total do minha proteção</li> </ul> |
| Exploração de A2.   |

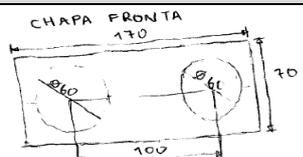
## Levantamento de Questões de A3.

① A minha proteção pode ser de formato retangular?

② O meu produto possui duas partes a chapa frontal e a aba.

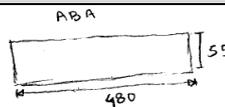
③ A proteção deve proteger duas polias de 60 mm cada uma e a distância entre os centros das polias é 100 mm, com mais 5 mm de folga, pois a proteção não pode encostar na correia, e seu comprimento é de  $30+30+100+5+5 = 170$  mm e a largura eu somei  $5+5+60 = 70$  mm, e perímetro eu somei as larguras e os comprimentos  $170+170+70+70 = 480$  mm, já a área da chapa frontal eu multipliquei  $170 \times 70 = 11900$  a aba eu peguei o perímetro e multipliquei por 50 que é a largura da aba que é igual a 24000 a área da aba, já para resolver a área total do produto eu somei o total do comprimento mais o total da largura  $11900 + 24000 = 35900$   $m^2$ .

## Unidade: Conjectura



ÁREA FRONTAL  
 $AF = \text{base} \times \text{altura}$   
 $AF = 170 \times 70$   
 $AF = 11900 \text{ mm}^2$

PERÍMETRO FRONTAL  
 $P = 2 \cdot 70 + 2 \cdot 170$   
 $P = 140 + 340$   
 $P = 480 \text{ mm}$



ÁREA DA ABA  
 $AA = \text{base} \times \text{altura}$  (obs: base = perímetro da chapa frontal)

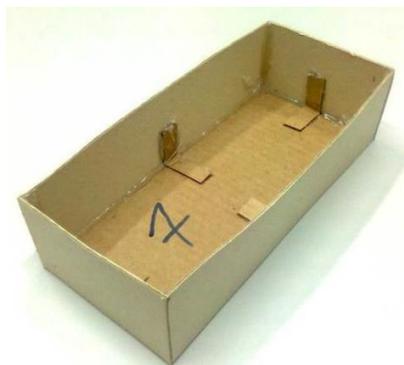
$AA = 480 \times 55$   
 $AA = 26400 \text{ mm}^2$

ÁREA TOTAL  
 $AT = AF + AA$   
 $AT = 11900 + 26400$   
 $AT = 38300 \text{ mm}^2$

ÁREA em CM  
 $A = 38300 \div 100$   
 $A = 383 \text{ cm}^2$

## Conjectura de A1.

## Unidade: Testes e Refinamento



## Teste de A1.

Unidade: Justificativa e Avaliação

Meu produto atende aos requisitos, pois é uma proteção  
feita de ferroreto retangular com medidas que permitem  
livre movimentação das pedras, em que podemos determi-  
nar a quantidade de material usado  
Para encontrar a base da chapa frontal, calculei o raio das pedras  
(30+30) mais o espaço entre as pedras (10) mais 5mm de folga.

Justificativa de A1.

Nesta categoria notamos a evolução da compreensão do problema pelos alunos. Na medida em que passam pelas etapas, ocorre a aproximação entre o problema por eles evidenciado e a solução proposta. As etapas da investigação matemática também aparecem mescladas, conforme observamos no texto de A3. Este texto apresenta elementos de exploração, levantamento de questões e conjectura simultaneamente, mostrando assim uma intensa relação entre as fases da investigação matemática. A mistura de representações, ora escrita, ora gráfica, mostra as diversas formas de expressão dos alunos, exigindo destes o uso de seus conhecimentos prévios. Isso reforça uma característica fundamental da investigação matemática: dar liberdade à criatividade dos alunos.

## ANÁLISE E INTERPRETAÇÃO DOS RESULTADOS

Na unidade Exploração e Levantamento de Questões, observamos pelo texto de A2 a preocupação dos alunos com os aspectos funcionais do produto, para o qual deveriam calcular a quantidade de material que seria gasto para sua fabricação. A influência desse aspecto no cálculo se deu pelo acréscimo nas dimensões do produto, que não sendo explícito no texto da tarefa, oportuniza a discussão, formulação e refutamento de questões, testes e produção de novas conjecturas. Podemos considerar que o levantamento de conjecturas, bem como o teste e reformulação das mesmas, segunda etapa da investigação matemática de acordo com Ponte et al. (2005), aproxima a ação dos alunos, neste momento, do trabalho de um matemático.

Os valores numéricos de diâmetro e distância já começam a fazer sentido, como vemos no levantamento de questões de A3, que apresenta resultados da fase de conjectura, mostrando que o aluno constrói sua compreensão do problema num processo de conjectura-teste-demonstração. A conjectura, nesta atividade, foi apresentada pelos alunos como resultado da coleta de informações na fase de exploração enunciada por Ponte et al. (2005).

Como vemos pelo registro de A1, a representação ilustrativa complementa a representação algébrica, evidenciando a escolha da forma geométrica. A consolidação dessa conjectura aparece na construção do protótipo do produto, onde os alunos realizam medições e cálculos, podendo confirmar ou não sua validade. No protótipo

construído por A3, o objeto tridimensional oferece um novo modelo de representação, através do qual é possível ao aluno identificar os elementos observados na exploração e utilizados na conjectura.

O resultado da ação investigativa, dos alunos, é justificado com base na funcionalidade do produto, como expresso no texto de A1. Esta justificativa, de caráter geral, aparece por terem surgido modelos de proteção de diversos formatos, em que os cálculos de área e perímetro também apresentaram resultados diferentes. Isto evidencia uma característica essencial da investigação matemática, que é possibilitar a definição do problema e seus encaminhamentos pelo aluno, que partindo de uma situação aberta pode chegar a várias respostas (BERTINI e PASSOS, 2008). Assim, cada aluno pôde construir uma trajetória particular de resolução, que expressa de maneira genuína sua compreensão atual dos conhecimentos trabalhados durante a atividade.

A partir da categorização dos fragmentos textuais, confirmamos a efetivação das categorias prévias, conforme os procedimentos de análise adotados. Estas categorias e suas ramificações permitiram observar que a abordagem metodológica da investigação matemática favoreceu o protagonismo dos alunos durante a realização da atividade proposta, visto que as categorias de análise são baseadas no referencial teórico sobre investigação matemática e condizem com as etapas da atividade investigativa de acordo com Ponte et al. (2005).

A atividade realizada apresenta consequências tanto para a estratégia de ensino, adotada pelo professor, quanto para a aprendizagem dos alunos. A estratégia de ensino do professor está de acordo com a indicação de Paraná (2008) que indica a investigação matemática como um processo pedagógico que contribui para que os estudantes encontrem generalidades e regularidades na busca pela descrição de fenômenos, matemáticos ou não, de modo a se apropriar da linguagem matemática adequada para a situação em estudo.

A atuação do professor deixou de ter um caráter informativo, através da exposição de conteúdos e correção final de resultados, dando lugar a interação com os caminhos da investigação escolhidos pelos alunos. Isso abriu um espaço para que este pudesse atuar mais como um indagador, provocando a reflexão dos alunos, do que como uma fonte de respostas.

Ao propor aos alunos recorrer ao método da investigação matemática, o docente teve a oportunidade: de estimular os registros escritos, bem como sua sistematização; observar a capacidade de compreensão dos alunos em relação ao problema exposto; identificar distorções quanto aos conceitos matemáticos envolvidos e contribuir para um melhor aproveitamento destes em contextos reais de aplicação.

Os efeitos dessa abordagem para a aprendizagem puderam ser vistos pela forma como os alunos estruturaram o seu raciocínio durante a atividade. Consideramos que o envolvimento do aluno na atividade se deu de modo ativo, pois os mesmos mobilizaram por meio de diferentes conjecturas, testes e reformulações conhecimentos matemáticos para a elaboração de modelos para a proteção do equipamento visado.

Segundo Ponte (2003), este tipo de envolvimento é condição fundamental para a aprendizagem em matemática, uma vez que mobiliza recursos cognitivos.

De fato, a maioria dos alunos resolve um problema sem refletir sobre possíveis etapas de desenvolvimento, simplesmente por nunca terem tido contato com algum método estruturado. As produções expostas anteriormente representam o formato final da atividade registrada pelos alunos, que para chegar até ela percorreram várias vezes o caminho da exploração, questionamentos e testes de conjecturas, que possibilitaram uma produção original para proteção do equipamento.

A expressão do pensamento do aluno através de frases e seu posterior desenvolvimento utilizando conceitos, fórmulas e propriedades matemáticas interliga a resolução operacional à estratégia que foi planejada, ainda que de modo parcial, na fase de exploração e levantamento de questões. A elaboração de desenhos, como meio de representar parte do problema, destacando medidas e situando a área e o perímetro e sua posterior representação algébrica indicam uma busca, ao nível desses alunos, de realizar sua investigação com rigor. Consideramos que a utilização dos conceitos matemáticos associados com uma situação da realidade dos alunos pode ter facilitado a investigação e elaboração de estratégias de resolução, assim como posto por Bertini e Passos (2008).

A fase de testes também representou um momento diferenciado, que contribuiu para que os alunos validassem as fases anteriores, podendo justificar a forma geométrica escolhida, os dados coletados, os cálculos realizados e visualizar no protótipo a presença da área e do perímetro de modo mais concreto. Isto proporcionou maior segurança para que pudessem avaliar seus resultados e justificar o atendimento do produto por eles desenvolvido diante das condições impostas e do caráter aberto da situação, conforme o tipo de situação descrito por Ponte et al. (2005) e Bertini e Passos (2008).

Nesse sentido, acreditamos que a abordagem do conteúdo de área e perímetro, por meio da investigação matemática, possibilitou um olhar sobre os processos de ensino e de aprendizagem na perspectiva da descoberta. Sinalizando que, por meio da situação investigada pelos alunos, além dos conteúdos matemáticos utilizados foram mobilizados diferentes conhecimentos técnicos sobre o produto a ser protegido.

## **CONSIDERAÇÕES FINAIS**

Após o desenvolvimento da atividade de investigação matemática no curso técnico, percebemos uma maior compreensão e entendimento do aluno quanto à utilidade da matemática e seu propósito de servir de instrumento para compreensão de uma situação da realidade. Esse aspecto, porém, não pode favorecer a dicotomia entre aplicação prática e conceito, uma vez que entre ambos existe uma relação indissociável. Deste modo, esperamos ter contribuído com o aprendizado dos alunos por meio da investigação matemática, mostrando a importância da aplicabilidade de conceitos matemáticos na solução de problemas.

Nesse contexto, sinalizamos a potencialidade da investigação matemática como abordagem de ensino e de aprendizagem de matemática, de modo particular, para cursos técnicos. Assim, ao utilizar esta abordagem possibilitamos uma mudança significativa na ação do professor e dos alunos, na qual o professor deixou de ser a fonte de conhecimento e os alunos puderam se reconhecer como investigadores, tendo um papel ativo em seu processo de aprendizagem.

Desse modo, este trabalho pode motivar e auxiliar outros professores de matemática, que atuam em cursos técnicos, a resgatar o significado dos conceitos matemáticos por meio da utilização de atividades investigativas, ajudando seus alunos a aplicar os conhecimentos matemáticos em situações do seu trabalho.

Salientamos, ainda, a oportunidade de aprimorar a reflexão dos professores de matemática sobre sua prática, considerando que quanto melhor for seu repertório de estratégias de ensino, maiores serão as suas possibilidades de obter sucesso nas atividades por estes planejadas.

## REFERÊNCIAS

- BERTINI, L. F.; PASSOS, C. L. B. Uso da investigação no processo de ensino e de aprendizagem nas séries iniciais do ensino fundamental. In: XII ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 5 a 7 de set. 2008. São Paulo: Livro de resumos... São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2008, s. p.
- BRASIL, Secretaria de Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática – ensino médio**. Brasília (DF): MEC/SEF, 1998.
- DICK, A. P.; PALIOZA, L. H.; HAUSCHILD, C. A. Investigação matemática: uma metodologia para o ensino fundamental. **Revista Destaques Acadêmicos**, v. 6, n. 4, p. 7-18, 2014.
- LORENZATO, S.; VILA, M. C. Século XXI: Qual Matemática é Recomendável? **Zetetiké**, v. 1, p. 41-50, 1993.
- MORAES, R. Uma tempestade de luz: a compreensão possibilitada pela análise textual discursiva. **Ciência & Educação**: Bauru, SP, v. 9, n. 2, p. 191-210, 2003.
- MORAES, R.; GALIAZZI, M. C. **Análise Textual Discursiva**. Ijuí: Ed. Unijuí, 2007.
- MORESI, E. (Org.). **Metodologia da Pesquisa**. Brasília – DF: 2003.
- PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica: Matemática**. Curitiba: SEED, 2008.
- PONTE, J. P. Investigar, ensinar e aprender. (CD-ROM, p. 25-39). Lisboa: **APM. Actas do Profmat**, 2003.
- PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.