Revista Ciências & Ideias

VOLUME 8, N.2 – MAIO/AGOSTO 2017

CONHECIMENTO DO CONTEÚDO DE SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS: UMA PESQUISA COM PROFESSORES EM FORMAÇÃO INICIAL OU CONTINUADA

CONTENT KNOWLEDGE OF NUMERICAL SEQUENCES: A RESEARCH WITH TEACHERS IN INITIAL OR CONTINUED EDUCATION

Bruna Moresco Rizzon[1] **[brumoresco1@hotmail.com]**
Isolda Gianni de Lima[1] **[iglima1@gmail.com]**
Laurete Zanol Sauer[1] **[lzsauer2@gmail.com]**
Helena Noronha Cury[2] **[curyhn@gmail.com]**

1 Universidade de Caxias do Sul, PPG Ensino de Ciências e Matemática, Rua Francisco Getúlio Vargas, 1130, Caxias do Sul, Rio Grande do Sul.

2 Centro Universitário Franciscano, PPG Ensino de Ciências e Matemática, Rua Silva Jardim, 1175, Santa Maria, Rio Grande do Sul.

RESUMO

Neste artigo, são apresentados resultados parciais de uma investigação sobre dificuldades de professores de Matemática em formação inicial ou continuada em relação ao conteúdo "sequências numéricas". Na pesquisa, utilizou-se um teste composto por duas questões, cujos dados resultantes são as respostas escritas dos participantes, alunos de cursos de Licenciatura em Matemática e de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, ambos de uma Instituição de Ensino Superior do Rio Grande do Sul. As respostas incorretas foram escolhidas para uma análise mais aprofundada, quantitativa e qualitativa, e constatou-se que as dificuldades apresentadas pelos participantes são relacionadas à falta de conhecimento sobre o conteúdo, ao uso inadequado da linguagem matemática, à interpretação equivocada dos enunciados e desconhecimento da fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica ilimitada. Sugere-se que os erros identificados e analisados podem ser usados no planejamento de atividades a serem aplicadas em cursos de formação de professores de Matemática, visando o aprimoramento do conhecimento matemático desse conteúdo, como forma de qualificar o seu ensino na escola básica.

PALAVRAS-CHAVE: Sequências numéricas. Análise de erros. Formação inicial ou continuada de professores de Matemática.

ABSTRACT

In this article partial results of an investigation are presented in order to examine the difficulties mathematics teachers in initial or continued education have about the content "numerical sequences." As instrument of research, a test consisting of two questions was applied and the resulting data were the written responses given by the participants, students from a Mathematics Teaching Course and a Professional Masters in Mathematical Education of a higher education institution of Rio Grande do Sul. Incorrect answers were chosen for further quantitative and qualitative analyses and it was found out that the participants had difficulties related to the lack of content knowledge of sequences, the inadequate use of mathematical language, the confusion between terms of the sequences, the misinterpretation of the statements and the formula of the sum of terms of an unlimited geometric progression. It is suggested, then, that the errors identified and analyzed could be used in the planning of activities to be applied in training courses for Mathematics teachers,

doi: 10.22047/2176-1477/2017.v8i2.670
Recebido em: 20/02/2017 Aprovado em: 20/09/2017 Publicado em: 01/12/2017

aiming at improving the mathematical knowledge about this content as a way to qualify the teaching of the subject in basic school.
***KEYWORDS**: Numerical sequences; Error analysis; Initial or continued mathematics teachers education.*

INTRODUÇÃO

Ao se pensar em Matemática, disciplina que é, muitas vezes, acusada de ser a vilã em termos de reprovação e desistência de alunos, em qualquer nível de ensino, chamam a atenção algumas dificuldades dos alunos em resolver exercícios ou problemas que lhes são propostos, em sala de aula ou em avaliações. Tais dificuldades ocasionam erros que são tratados de diferentes formas: algumas vezes, os professores apenas assinalam com um "x" a resposta incorreta e descontam pontos; em outras, devolvem a prova ao aluno com alguma observação sobre o erro ou algum questionamento sobre a dificuldade apontada; em outras vezes, ainda, os professores consideram os erros para retomar os conteúdos que não foram aprendidos, além de outras formas possíveis de apontar ou tratar os erros identificados.

Qualquer que seja o procedimento escolhido para retornar ao aluno a informação de que não resolveu corretamente a questão, é necessário que o professor conheça o conteúdo envolvido. Não se considera apenas o conhecimento dos tópicos a serem ensinados, pois, supostamente, os professores de Matemática têm esse conhecimento; o que se considera, também, é o conhecimento pedagógico do conteúdo.

Shulman (1986) criou três categorias de conhecimento do conteúdo para o ensino: conhecimento do conteúdo da disciplina, conhecimento pedagógico do conteúdo e conhecimento curricular. A primeira categoria "refere-se à quantidade e organização do conhecimento em si, na mente do professor" (p. 9) e a segunda, que mais chamou a atenção dos pesquisadores, é a do conhecimento pedagógico do conteúdo, definido por Shulman como o que "vai além do conhecimento do conteúdo da disciplina em si para a dimensão do conhecimento da disciplina para ensinar. (SHULMAN, 1986, p. 9). Entre os aspectos englobados por essa categoria de conhecimento, o mesmo autor destaca, para os tópicos ensinados em uma determinada disciplina,

> [...] as formas mais úteis para representação daqueles tópicos, as mais poderosas analogias, ilustrações, exemplos e demonstrações – em outras palavras, as maneiras de representar e formular um conteúdo que o faça compreensível para os outros. (SHULMAN, 1986, p. 9).

Já o conhecimento curricular abrange o conhecimento dos tópicos para um determinado nível de ensino e dos materiais instrucionais disponíveis para esse ensino.

Utilizando essas ideias de Shulman como base, Deborah Ball e colaboradores criaram o conceito de conhecimento matemático para o ensino (MKT), como sendo "o conhecimento matemático necessário para levar adiante o trabalho de ensinar matemática" (BALL, THAMES, PHELPS, 2008, p. 395) e propuseram uma divisão do MKT em seis domínios, que aparecem definidos, com pequenas variações, em diferentes artigos (BALL; THAMES; PHELPS, 2008; HILL, BALL; SHILLING, 2008; BALL; HILL; BASS, 2005). O conhecimento comum do conteúdo (CCK) é basicamente descrito como o conhecimento matemático comum a muitas outras profissões ou ocupações que também utilizam matemática; já o conhecimento especializado do conteúdo (SCK) é o conhecimento que permite aos professores o engajamento em tarefas de ensino. A definição de CCK é próxima da de Shulman para "conhecimento do conteúdo da matéria" e SCK é um conceito mais novo, porém, ambos envolvem conhecimento matemático e não exigem conhecimento dos estudantes ou do ensino em si.

O conhecimento do conteúdo e dos estudantes (KCS) é "o conhecimento do conteúdo entrelaçado com o conhecimento de como os alunos pensam sobre, conhecem ou aprendem esse conteúdo particular" (HILL; BALL; SHILLING, 2008, p. 375). O conhecimento do conteúdo e do ensino (KCT) combina esse KCS com o SCK, sobre a Matemática. Observe-se que as siglas correspondentes às expressões em inglês já são usuais na literatura sobre o tema.

Nos textos de Shulman (1986), Ball, Thames e Phelps (2008) e Hill, Ball e Shilling (2008), encontram-se várias menções aos erros cometidos pelos alunos e relações entre as categorias de conhecimento do professor de Matemática com a forma como lidam com os erros dos alunos. Esses estudos têm enfocado erros cometidos por estudantes de séries iniciais; também no Brasil, há estudos que relacionam as categorias de Shulman com as produções escritas de alunos de educação básica (MANDARINO, 2010, por exemplo).

Encontrou-se poucas referências a estudos realizados em cursos superiores, como é o interesse deste estudo, com base nas ideias de Shulman ou Ball (SHALEM; SAPIRE; SORTO, 2014; SPEER; KING; HOWELL, 2015) e alguns trabalhos sobre análise de erros em conteúdos matemáticos em nível superior (BARICHELLO, 2008; JOJOT, 2009; BORTOLI, 2011). De qualquer forma, entende-se que, na análise de erros em resolução de problemas sobre algum conteúdo específico, deve-se levar em conta o conhecimento do professor sobre tal conteúdo, pois suas dificuldades sobre o tema terão influência, também, na aprendizagem de seus alunos.

Neste estudo, considerou-se que as dificuldades evidenciadas em relação ao conteúdo de sequências numéricas, por professores de Matemática em formação inicial ou continuada, em cursos de Licenciatura em Matemática e de Mestrados da área de Ensino de Ciências e Matemática, é um problema que merece ser tratado por meio de uma investigação aprofundada. Para tanto, um grupo de docentes de duas Instituições de Ensino Superior do Rio Grande do Sul, que mantém cursos de formação inicial e continuada nessa área, reuniu-se para propor uma investigação conjunta (Processo CNPq 443118/2014-0) que tem, entre outros, o objetivo de analisar dificuldades apresentadas, por professores de Matemática em formação inicial ou continuada, em relação ao conteúdo "sequências numéricas". Neste artigo, são apresentados resultados parciais da pesquisa, oriundos da aplicação de instrumento de pesquisa a 36 alunos de uma das Instituições envolvidas no projeto e que investigam, especialmente, o conhecimento comum do conteúdo. Tais resultados são parte inicial de uma pesquisa para dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática.

OS ERROS DOS ALUNOS E AS CATEGORIAS DE CONHECIMENTO DOS PROFESSORES

O estudo de erros cometidos por estudantes, ao resolver problemas ou exercícios matemáticos, em qualquer nível de ensino, vem sendo feito com variadas abordagens teóricas e metodológicas, enfatizando-se, por vezes, toda a produção escrita dos estudantes nas resoluções apresentadas e, em outras situações, apenas os erros cometidos.

Nos Estados Unidos, o início das pesquisas sobre erros na aprendizagem de Matemática, na década de 20 do século passado, foi fundamentado em teorias comportamentalistas, como consta, por exemplo, no trabalho de Thorndike, que avaliava estratégias utilizadas por estudantes de séries iniciais na resolução de operações aritméticas. (RESNICK; FORD, 1990).

Após um período de mudanças, com contribuições da Gestalt e de teorias psicanalíticas às pesquisas na área da Psicologia da Educação Matemática, houve uma mudança de enfoque nas investigações sobre os erros dos alunos, especialmente quando Raffaela Borasi, pesquisadora italiana radicada na Universidade Estadual de Nova York, em Buffalo, defendeu sua tese sobre o uso educacional dos erros, com base em Khun, Lakatos e em visões humanistas e construtivistas da Matemática (BORASI, 1987).

Em trabalho posterior, a mesma autora retoma a ideia de que os erros são trampolins para a aprendizagem e apresenta várias pesquisas sobre o tema. Todas as investigações abordavam algum tópico específico do conteúdo matemático (geometria, ângulos, frações, limites, entre outros) e a forma como os alunos respondiam a questões e tarefas propostas, em muitos delas trazendo, também, experiências com formação de professores. (BORASI, 1996)

Ball e colaboradores trouxeram suas ideias sobre os erros de alunos em Matemática para inseri-las no contexto do conhecimento matemático para o ensino (MKT). Um exemplo da importância de o professor ter esse conhecimento é trazido por Ball, Thames e Phelps (2008), quando mostram erros comuns, em subtrações, de alunos em séries iniciais:

$$\begin{array}{r} 307 \\ \underline{-168} \\ 261 \end{array} \qquad \qquad \begin{array}{r} 307 \\ \underline{-168} \\ 169 \end{array}$$

Segundo esses autores, não há necessidade de um conhecimento especial para saber que ambas as respostas estão erradas: à esquerda, o aluno diminuiu o maior do menor, sem levar em conta se estava no minuendo ou no subtraendo; à direita, o aluno "pediu 1 emprestado" para fazer "17-8", mas talvez tenha considerado que não podia "pedir" do zero, então só foi diminuí-lo na coluna das centenas. Ball, Thames e Phelps (2008, p. 397) consideram que "ver ambas as respostas simplesmente como erradas não permite que o professor tenha a detalhada compreensão matemática requerida para um tratamento hábil dos problemas que esses alunos enfrentam". Daí, a importância de entender as causas.

Quando propõem a divisão do MKT em categorias, Ball, Thames e Phelps (2008, p. 401) apresentam distinções importantes sobre esses domínios do conhecimento:

> [...] reconhecer uma resposta errada é conhecimento comum do conteúdo (CCK), enquanto que opinar sobre a natureza de um erro, especialmente se não é familiar, requer agilidade em pensar sobre números, atenção aos padrões e pensamento flexível sobre os significados, de uma forma que é característica do conhecimento especializado do conteúdo (SCK). Por outro lado, familiaridade com os erros comuns e decisão sobre quais, entre muitos erros, são mais prováveis de serem cometidos pelos alunos, são exemplos de conhecimento do conteúdo e dos estudantes (KCS).

Além disso, os mesmos autores apontam, ainda, a necessidade de conhecer metodologias de ensino e materiais instrucionais adequados ao conteúdo a ser ensinado, o que faz parte do conhecimento do conteúdo e do respectivo ensino (KCT). Assim, em qualquer categoria do conhecimento, a análise dos erros e formas adequadas de lidar com as dificuldades dos alunos deveriam fazer parte da formação do professor de Matemática.

Os estudos desenvolvidos por Borasi, Shulman, Ball e colaboradores têm características distintas, mas todos eles refletem sobre os erros e seus usos na formação do professor. Para sintetizar as ideias gerais, apresenta-se, no Quadro 1, algumas características dos textos considerados na pesquisa aqui relatada.

Quadro 1: Características principais dos textos analisados

Referência	**Características sobre erros, sobre resultados de investigações e sobre aspectos relacionados à formação do professor.**
Borasi (1996)	- Erros podem tornar-se uma ferramenta poderosa para diagnosticar dificuldades específicas de aprendizagem e, consequentemente, direcionar soluções. - Erros são vistos como sinais de que algo não deu certo no processo de aprendizagem e que uma remediação se faz necessária. - Erros têm um papel fundamental para que o aluno avance em uma disciplina. - Erros podem ser usados para investigar a natureza de noções fundamentais da matemática. - Erros, em algumas situações, podem ser interpretados como o resultado de uma mudança involuntária de atributos ou premissas, e assim podem naturalmente fornecer o estímulo para iniciar a investigação. - Conjecturas incorretas, palpites injustificados e resultados parciais são passos necessários na criação de novos resultados matemáticos. - A reparação do erro será muito mais efetiva se o professor estiver disposto e for capaz de levantar hipóteses sobre suas possíveis causas. - O aluno dever ser encorajado a escrever uma "explicação" sobre como realizou determinada tarefa. - Para apreciar completamente o potencial educacional dos erros, como trampolins para a investigação, é importante perceber a variedade de perguntas e explorações que podem ser motivadas por diferentes tipos de erros matemáticos e elaborar estratégias de ensino apropriadas. - Os professores devem ser encorajados a repensarem suas práticas e seus objetivos de ensino à luz de padrões estabelecidos pela comunidade escolar. - É importante a exposição pública dos resultados obtidos pelos professores, em suas estratégias, quando utilizam o erro para análise das dificuldades.
Shulman (1986)	- O estudo das concepções errôneas do estudante e sua influência sobre a aprendizagem subsequente estão entre os tópicos mais férteis da pesquisa cognitiva.

	- Está sendo recolhido um corpo sempre crescente de conhecimento sobre as concepções errôneas dos estudantes e sobre as condições de ensino necessárias para superar e transformar essas concepções iniciais. - A formação do professor é o ponto de partida para uma boa aprendizagem e exige uma estratégia teórica mais coerente. - O que falta no ensino são perguntas sobre o conteúdo das lições ensinadas, as questões feitas e as explanações apresentadas. - Na literatura, a expressão "conhecimento pedagógico do conteúdo", designa um tipo especial de saber profissional docente: um amálgama entre conhecimentos pedagógicos e conhecimentos disciplinares que constituiria uma forma específica de o professor conhecer sua disciplina. - Lembranças passadas sobre o ensino recebido são valiosas para guiar o trabalho de um professor, tanto como fonte de ideias específicas,quanto como heurística para estimular novos pensamentos. - "Eu sonho com um projeto de programas de formação de professores com base em pesquisa, que cresça para acomodar nossas concepções tanto do processo quanto do conteúdo" (p. 13).
Ball, Thames e Phelps (2008) e Hill, Ball e Schilling (2008)	- Os erros são elementos que fazem parte dos processos de ensino e aprendizagem e das categorias de conhecimento dos professores. - A partir da noção de conhecimento pedagógico do conteúdo, proposta por Shulman, o conceito de conhecimento matemático para o ensino é o conhecimento matemático específico do professor de matemática da escola, com uma composição e características próprias, em geral distintas do conhecimento matemático utilizado no exercício de outras profissões. - O conhecimento dos professores sobre os conteúdos matemáticos interage com suas concepções e crenças sobre ensino, aprendizagem e estudantes, e sobre metodologias de ensino. - É importante modificar a formação dos professores visando à melhoria da aprendizagem matemática dos alunos e proporcionando oportunidades para aprender a usar os conhecimentos sobre os erros em contextos variados de prática.

Fonte: Elaboração dos autores, a partir dos textos referenciado.

Acredita-se que, se o futuro professor conseguir entender a origem dos seus próprios erros, relacionados a um determinado conteúdo, ele vai poder influenciar positivamente no processo de aprendizagem de seus alunos.

Em uma etapa posterior da pesquisa aqui parcialmente relatada, pretende-se, a partir da análise e discussão dos erros com uma amostra de professores da rede municipal da região em que se localiza a Instituição, propor a elaboração de tarefas sobre sequências, a serem aplicadas a alunos do Ensino Fundamental, para discussão sobre a importância de usar os erros como trampolins para a investigação.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A pesquisa apresentada neste artigo foi desenvolvida por meio da aplicação de um teste, composto por duas questões relativas a sequências numéricas, a 36 alunos de uma das Instituições envolvidas no projeto. Desses 36 estudantes, 30 cursavam Licenciatura em Matemática e seis eram estudantes de curso de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemáticas. Os alunos de Licenciatura em Matemática cursavam a disciplina de Análise Real, na qual são retomados tópicos estudados em Cálculo I, como sequências numéricas; já os mestrandos cursavam a disciplina de Tópicos de Cálculo, em que são retomados conteúdos abordados na educação básica, tais como limites, sequências numéricas e outros. A aplicação do teste foi realizada em sala de aula, com uma duração média de 30 minutos. Para evitar a identificação, os respondentes da Licenciatura são nomeados por L1, L2, ... L30 e os do mestrado, por M1, M2, ...M6. A todos foi solicitada a assinatura de Termos de Consentimento Livre e Esclarecido.

A análise das respostas foi realizada em duas etapas; inicialmente, foi feita a contagem de respostas corretas, parcialmente corretas, incorretas e em branco, tendo sido usados os seguintes critérios para essa avaliação:

Resposta correta: quando o aluno compreende a questão, mostra conhecer o conteúdo e propõe estratégias adequadas para a solução;

Resposta parcialmente correta: quando há evidências de ter sido selecionada uma estratégia adequada, o aluno resolve parte da questão, mas ignora ou não sabe resolver outra;

Resposta incorreta: quando o aluno usa estratégia inadequada e apresenta solução incorreta;

Em Branco: quando o aluno não indica qualquer encaminhamento de resolução.

Em seguida, as respostas incorretas foram analisadas qualitativamente, com classificação dos erros encontrados, com base no conhecimento acadêmico sobre sequências numéricas. Finalmente, foram tecidas considerações sobre os erros encontrados e as possibilidades de trabalhá-los com os professores em formação.

A análise qualitativa das respostas incorretas, tanto dos licenciandos como dos mestrandos participantes da pesquisa, foi baseada em Bardin (1979). Assim, inicialmente foi feita uma leitura de todas as respostas, estabelecendo-se unidades de análise, conforme a semelhanças das respostas encontradas. Em seguida, foram criadas as categorias, agrupando as unidades e representando-as em 12 classes; o agrupamento foi feito segundo critérios *a posteriori*, visto que somente com a leitura e unitarização foi possível condensar os resultados.

Finalmente, cada classe foi descrita por um texto-síntese, com a respectiva apresentação de todas as ocorrências de respostas. Após a categorização e exemplificação, foi possível sintetizar as dificuldades em quatro tipos, indicados por Tipo I, II, III e IV.

APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Inicialmente, são apresentadas as questões constantes do teste que foi aplicado aos alunos da Licenciatura e do Mestrado:

QUESTÃO 1: A sequência de figuras abaixo ilustra o fractal denominado Tapete de Sierpinski. Partindo de um quadrado de lado *L*, faz-se uma divisão de seu lado em três partes iguais, formando-se nove novos quadrados similares ao inicial. Nessa divisão, elimina-se o quadrado central, ficando, na primeira iteração, com oito quadrados. A partir disso, na segunda iteração, considera-se cada um destes como se fosse o inicial e repete-se o procedimento, e assim sucessivamente.

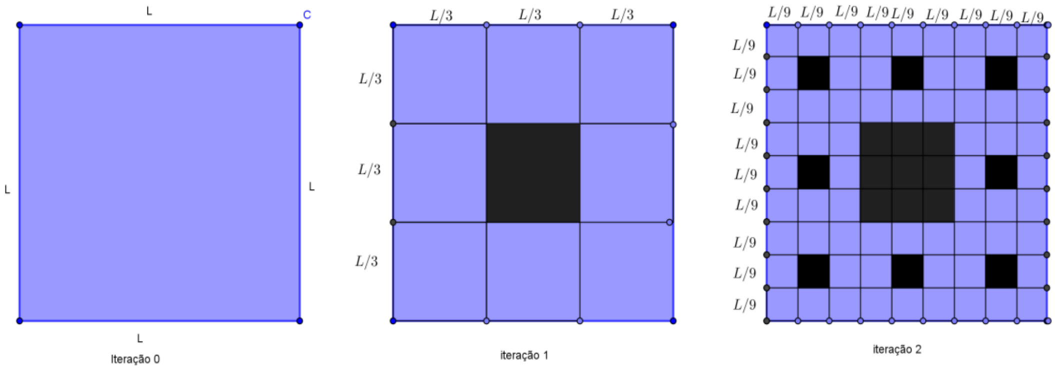

Figura 1

Fonte: Elaborado pelos autores

A partir dessa construção:

(a) Escreva a sequência formada pelas medidas dos lados dos quadrados até a quinta iteração, além da expressão do seu termo geral.

(b) Escreva a sequência formada pela quantidade de quadrados, que permanece em cada iteração, na construção fractal, bem como seu o termo geral.

(c) Tomando-se um quadrado de cada iteração, calculando sua área e formando uma sequência, qual é a expressão do seu termo geral? Qual a soma dessas áreas?

(d) Idem ao item (c), porém considerando os perímetros dos quadrados.

QUESTÃO 2: O lado de um triângulo equilátero mede 5 cm. Inscreve-se nele um segundo triângulo equilátero unindo os pontos médios dos lados do primeiro triângulo. Segue-se assim, em um processo iterativo, indefinidamente.

(a) Escreva a sequência cujos termos são os perímetros desses triângulos.

(b) Qual é o sexto termo dessa sequência?

(c) Qual é a expressão do termo geral, p_n, dessa sequência?

(d) Qual é a soma dos termos dessa sequência?

Após a análise de todas as respostas obtidas, foram elaborados os Quadros 2 e 3, respectivamente, com a distribuição das categorias de respostas dos alunos da Licenciatura e do Mestrado.

Quadro 2: Distribuição das respostas de alunos da Licenciatura em Matemática

Questão 1			*Questão* 2		
a)	N.	%	a)	N.	%
Corretas	0	0	Corretas	1	3
Parcialmente Corretas	13	43	Parcialmente Corretas	3	10
Incorretas	10	33	Incorretas	1	3
Em branco	7	23	Em branco	25	83

b)			b)		
Corretas	0	0	Corretas	2	7
Parcialmente Corretas	9	30	Parcialmente Corretas	0	0
Incorretas	5	17	Incorretas	1	3
Em branco	16	53	Em branco	27	90
c)			c)		
Corretas	0	0	Corretas	0	0
Parcialmente Corretas	3	10	Parcialmente Corretas	0	0
Incorretas	7	23	Incorretas	1	3
Em branco	20	67	Em branco	29	97
d)			d)		
Corretas	0	0	Corretas	2	7
Parcialmente Corretas	2	7	Parcialmente Corretas	0	0
Incorretas	5	17	Incorretas	0	0
Em branco	23	77	Em branco	28	93

Fonte: Dados da pesquisa.

No Quadro 1, chama a atenção o grande número de respostas em branco: somente no item *a* da questão 1 esse porcentual foi menor do que nos outros itens. Já na questão 2, os números parecem mostrar um abandono do teste por parte dos alunos, quando poucos tentaram responder. Também é preocupante o pequeno número de respostas corretas, haja vista que o porcentual não atingiu sequer 10%, em qualquer das duas questões.

Quadro 3: Distribuição das respostas de alunos de Mestrado

Questão 1			*Questão* 2		
a)	N.	%	a)	N.	%
Corretas	0	0	Corretas	2	33
Parcialmente Corretas	4	67	Parcialmente Corretas	3	50
Incorretas	2	33	Incorretas	0	0
Em branco	0	0	Em branco	1	17
b)			b)		
Corretas	0	0	Corretas	3	50
Parcialmente Corretas	1	17	Parcialmente Corretas	0	0
Incorretas	5	83	Incorretas	2	33
Em branco	0	0	Em branco	1	17
c)			c)		
Corretas	0	0	Corretas	1	17
Parcialmente Corretas	3	50	Parcialmente Corretas	3	50
Incorretas	2	33	Incorretas	1	17
Em branco	1	17	Em branco	1	17

d)			d)		
Corretas	0	0	Corretas	3	50
Parcialmente Corretas	4	67	Parcialmente Corretas	0	0
Incorretas	2	33	Incorretas	1	17
Em branco	0	0	Em branco	2	33

Fonte: Dados da pesquisa.

No caso dos estudantes de Mestrado, parece ter havido maior comprometimento, visto que o porcentual de respostas em branco é bem menor. Mesmo assim, o porcentual de respostas corretas não ultrapassou 50%.

Para analisar qualitativamente as respostas incorretas, repete-se o enunciado de cada pergunta para que o leitor acompanhe mais facilmente as análises realizadas.

QUESTÃO 1a (10 respostas de licenciandos e 2 respostas de mestrandos): Escreva a sequência formada pelas medidas dos lados dos quadrados até a quinta iteração, além da expressão do seu termo geral.

Classe A: o aluno não levou em consideração o lado do quadrado, apenas indicou números (inteiros ou fracionários), representando uma sequência; apenas um deles usou as chaves para indicar a sequência como um conjunto dos termos:

L5: {1,3,9,27,81}

L8: 1, 9, 81, 729, 6591

L23: $\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{1}{27},\frac{1}{81},\frac{1}{243}\frac{1}{3^n}$,n∈ℕ

L25: $1^0 = 1$ $3^2 = 9\text{-}1= 8$ $9^2 = 81\text{-}16 = 64$ $27^2 = 729 = 705$

Classe B: o aluno indicou uma fração de numerador L (como lado do quadrado, conforme indicado nas figuras ilustrativas do Tapete de Sierpinski), mas não apresentou os termos da sequência, apenas em um dos termos e, ainda, de forma incorreta:

L6: L/6561

L9: L/15

L18: f(x)=L/3x

Classe C: o aluno indicou os termos por meio de frações e acertou os denominadores, mas errou os numeradores, porque usou L^2 (oul^2, sendo $l$lado do quadrado no Tapete de Sierpinski):

L26: $\frac{L^2}{3^0},\frac{L^2}{3^1},\frac{L^2}{3^2},\frac{L^2}{3^3}$ $TG = \frac{L^2}{3^i}, com\ i \in \mathbb{N}$

M2: $l^2,\frac{l^2}{3},\frac{l^2}{9},\frac{l^2}{27},\frac{l^2}{81}$

Classe D: o aluno introduziu a expressão4L e, nas iterações seguintes, multiplicou esse 4L por potências de 8:

L7:$4L, \frac{4L}{3}.8, \frac{4L}{3^2}.8^2, \frac{4L8^4}{3^4}, \frac{4L8^6}{3^6}$

M5: Iteração 0=4L Iteração 1=32L Iteração 2=256L Iteração 3=2304L

Além dessas respostas, ainda está incorreta a resposta do aluno L19, que escreveu "*Na* 5ª *iteração terão* 243 *quadrados de cada lado do quadrado",* sem que fosse possível entender o seu raciocínio.

QUESTÃO 1b (5 respostas de licenciandos e 5 de mestrandos): Escreva a sequência formada pela quantidade de quadrados, que permanece em cada iteração, na construção fractal, bem como seu o termo geral.

Classe E: o aluno indicou os termos da sequência por números naturais, mas de forma incorreta ou incompleta:

L6: 1, 9, 81, 729, 6561

L24: 1, 8,

M3: 9, 81, 729, 6561 termo geral: $3^n.3^n=3^{2n}$

Classe F: o aluno introduziu L nos termos da sequência ou na expressão do termo geral:

M2: $\frac{l^2}{9},\frac{l^2}{81},\frac{l^2}{729}\dots\frac{l^2}{9.9^n}$

M4: $\frac{L}{3^n}$

M5: Iteração 1=1 L/3; Iteração 2=17 L/9; Iteração3=153 L/81; Iteração 4=1377 L/729

Classe G: o aluno entendeu que a razão da progressão é 8, mas não soube expressar os termos da sequência:

L9: "L x 8 é o termo geral"

L18: f(x)=8x

Além dessas respostas, ainda estão incorretas as do aluno L10, que escreveu "*quando divide em* 9 *tira um*" e a do aluno M1, que indicou os termos por números fracionários, sendo os numeradores os termos da sequência solicitada e os denominadores, múltiplos de 9.

QUESTÃO 1c (7 respostas de licenciados e 2 de mestrandos): Tomando-se um quadrado de cada iteração, calculando sua área e formando uma sequência, qual é a expressão do seu termo geral? Qual a soma dessas áreas?

Classe H: o aluno indicou os termos da sequência ou a sua soma por números reais, sem levar em conta o valor L:

L5: $(1,\frac{1}{9},\frac{1}{81},\dots)$

L6: $a_n=1.9^{n-1}$

M2: $S=\frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{8}{9}}=\frac{1}{9}:\frac{1}{9}=1$

Classe I: o aluno entendeu que a área deve envolver o quadrado do lado L e que os termos são frações, mas cometeu algum erro na expressão desses termos:

L18: $f(x)=(\frac{L}{3x})^2\sum_{x=0}^{n}(\frac{L}{3x})^2$

L26: $L^2,\frac{8L^2}{9},\frac{8^2L^2}{9^2},\frac{8^3L^3}{9^3}\dots$ $TG=\frac{8^iL^i}{9^i},i\in\mathbb{N}$

L27: $l^2 - \frac{l^2}{9} - \frac{(\frac{l}{3})^2}{9}$

Classe J: o aluno entendeu que a área deve envolver o quadrado do lado, mas não expressou os termos como frações:

L16: Iteração 0=L^2 Iteração 1=8 L^2⇒nL^2 Iteração 2= 64 L^2

M5: Iteração 1=L^2 (12) Iteração 2=L^2 (17) Iteração 3=L^2(153) Iteração 4=L^2 (1377)

Além dessas respostas, ainda está incorreta a do aluno L7, que escreveu apenas os dois primeiros termos da sequência: A_0=l^2e A_1=$3(1/3)^2$

QUESTÃO 1d (5 respostas de licenciandos e 2 de mestrandos): Tomando-se um quadrado de cada iteração, calculando seu perímetro e formando uma sequência, qual é a expressão do seu termo geral? Qual a soma desses perímetros?

Classe K: o aluno entendeu que o perímetro deve envolver a medida do lado, mas não expressou os termos como frações:

L7: P=4 L

L16: Iteração 0=4 L Iteração 1=32 LΣ=292 L Iteração 2= 256 L

M3: 1º p=$12.\frac{L}{3} = 4\,L$ 2º p=$36.\frac{L}{9} = 4\,L$ termo geral: 4L Soma: n.4L

M5: 4L (1) 4 L(17) 4L (153) 4L (1377)

Classe L: o aluno entendeu que o perímetro deve envolver a medida do lado e que os termos são frações, mas cometeu algum erro na expressão desses termos:

L6: $a_n = \frac{l}{3}(\frac{1}{3})^{n-1}$

L17: "Expressão do termo geral: $4(\frac{L}{3n})^2$"

L26: $\frac{32L}{3}, \frac{32^2L}{3^2}, \frac{32^3L}{3^3}$ $TG = \frac{32^iL}{3^i},\ i \in \mathbb{N}$

QUESTÃO 2a: Escreva a sequência cujos termos são os perímetros desses triângulos.

Neste item, apenas a resposta do aluno L7 está errada: P_0=3 L P_1=3.(L/2).

QUESTÃO 2b: Qual é o sexto termo dessa sequência?

Neste item, há apenas dois tipos de respostas erradas, a do aluno L7 ($p_1 = \frac{1}{6}L.3 = \frac{3L}{6} = \frac{1}{2}L$) e a dos alunos M2 e M6, que consideraram ser $\frac{15}{2}$ o primeiro termo da sequência (e não o segundo, como o enunciado indicava), encontrando, então, $p_6 = \frac{15}{64}$.

QUESTÃO 2c: Qual é a expressão do termo geral, p_n, dessa sequência?

Neste item, há apenas duas respostas erradas:

L7: $p_n = \frac{1}{2}L.3 + \frac{1}{4}L.3 + \frac{1}{6}L.3 + \frac{1}{8}L.3 + \frac{1}{10} = 3{,}425\,L$

M2: termo geral: $a_1 = 3.\frac{3L}{2}$ e $q = \frac{3}{2}$ tende ao infinito.

QUESTÃO 2d: Qual é a soma dos termos dessa sequência?

Neste item, apenas uma resposta está incorreta, a do aluno M4, que entendeu ser a sequência limitada e indicou a soma dos termos por $S_m = \frac{15\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right)}{\frac{-1}{2}}$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Sintetizando as categorias de erros identificados nas resoluções de licenciandos ou mestrandos e a forma como foram apresentadas as suas respostas, podem ser considerados, neste estudo, quatro tipos de dificuldades:

Tipo I: mau uso da linguagem matemática, evidenciado, por exemplo, pela falta de parênteses ou chaves para indicar o conjunto dos termos das sequências;

Tipo II: confusão na indicação dos termos das sequências, usando somente os coeficientes numéricos ou, em outros casos, somente a medida do lado da figura em questão, omitindo os coeficientes fracionários;

Tipo III: interpretação equivocada do enunciado, como por exemplo quando o aluno não leva em conta a informação sobre o processo de iteração, considerando que o primeiro termo é de ordem zero;

Tipo IV: desconhecimento da lei que permite obter a soma dos termos de uma progressão geométrica ilimitada, cuja razão, em módulo, é menor do que 1.

Notou-se, também, que não houve diferenças expressivas no tipo de erros cometidos por licenciandos ou mestrandos, pois mesmo entre as respostas desses últimos, professores já atuantes na educação básica, foram encontrados erros relativos à progressão geométrica, um conteúdo que faz parte do currículo do Ensino Médio. Além disso, parece ter havido um desinteresse pelo teste, por parte dos licenciandos, visto que deixaram em branco um número muito expressivo de resoluções ou respostas.

Considerando que todos os respondentes são professores, em formação inicial ou continuada, acredita-se ser necessário retomar este conteúdo de sequências numéricas; a primeira condição para que o professor tenha conhecimento matemático para ensinar, tanto conforme Shulman (1986) quanto conforme Ball, Thames e Phelps (2008) ou Hill, Ball e Shulling (2008), é que esse tenha o conhecimento comum do conteúdo.

Como esses respondentes, em especial os mestrandos que já exercem a prática, são capazes de avaliar os erros dos seus próprios alunos em relação ao assunto envolvido no teste, se eles mesmos têm dúvidas sobre esse conteúdo? Como esperar que os seus alunos desenvolvam competência de conhecer e usar adequadamente a linguagem matemática, indispensável para compreender os conceitos expressos formalmente, se os professores cometem erros nesse sentido?

As licenciaturas em Matemática, atualmente, precisam distribuir horas para as práticas como componente curricular, além das que são destinadas aos estágios. Mas, apesar desse envolvimento em prática de ensino, as disciplinas de conteúdo matemático, em muitos cursos, continuam isoladas das pedagógicas, o que torna frágil o desenvolvimento de um conhecimento matemático para o ensino.

Mas como trabalhar com o conhecimento matemático em um curso de formação de professores? Moreira (2012), ao sugerir mudanças nas licenciaturas em Matemática ou ações a partir delas, discute quatro desafios que surgem no desenvolvimento de atividades de formação: o aprofundamento do conhecimento sobre a prática do professor da escola básica; o repensar da formação dos formadores; estudos sobre o papel da Matemática na formação do professor da escola básica; e a organização da Matemática para a escola em textos ou outros materiais desenvolvidos especificamente para o trabalho nas licenciaturas. Essas são sugestões de médio ou longo prazo, mas Moreira (2012, p. 1149) julga possível implementar ações imediatas e, entre elas, cita "projetos experimentais de produção de material para uso em determinadas disciplinas [...], sempre de acordo com as condições locais do corpo docente e discente".

Aproveitando essas sugestões, considera-se ser possível e desejável a elaboração de atividades sobre o conteúdo de sequências, a partir dos erros aqui classificados, para aplicá-las a professores da rede de Ensino Público, tanto aos que participam dos cursos de Licenciatura em Matemática ou de Mestrado em Ensino de Matemática da Instituição de Ensino Superior na qual foi aplicado o teste aqui analisado, como a outros professores que lecionam nas escolas dos municípios da região dessa mesma Instituição. Essa possibilidade vem ao encontro da experiência relatada por Borasi (1996), que usou erros de alunos de *high school*, sobre definição de circunferência, e apresentou-os a professores (em formação ou já atuando no ensino de Matemática), para que fossem discutidos e classificados. Os professores, trabalhando em grupo, discutiram, estabeleceram critérios de classificação, reestudaram tópicos de Geometria, Geometria Analítica, Topologia e Geometria Diferencial e, com isso, os erros foram geradores de novas aprendizagens, inclusive sobre a natureza das definições em Matemática.

Os erros cometidos pelos participantes da pesquisa, parcialmente relatada neste artigo, são exemplos de algumas dificuldades que esses professores enfrentam ou enfrentarão, no ensino na escola básica, mas também são evidências de possíveis dificuldades, que poderão ser discutidas nos próprios cursos, constituindo-se a análise de erros, dessa forma, uma ferramenta de ensino, aprendizagem e pesquisa.

REFERÊNCIAS

BALL, D. L.; HILL, H.; BASS, H. Knowing mathematics for teaching: who knows mathematics WELL enough to teach third grade and how can we decide? *American Educator*, n. 29, p. 14-22, 2005.

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education*, v. 59, n. 5, p. 389-407, Nov./Dec. 2008.

BARDIN, L. *Análise de conteúdo.*Lisboa: Edições 70, 1979.

BARICHELLO, L. *Análise de resoluções de problemas de cálculo diferencial em um ambiente de interação escrita*. 2008. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2008.

BORASI, R. Exploring mathematics through the Analisys of Errors. *For the Learning of Mathematics*, v. 7, n. 3, p. 2-8, Nov. 1987.

BORASI, R. *Reconceiving mathematics instruction*: a focus on errors. Norwood, NJ: Ablex, 1996.

BORTOLI, M. de F. *Análise de erros em matemática*: um estudo com alunos de ensino superior. 2011. Dissertação (Mestrado profissionalizante em Ensino de Matemática) – Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 2011.

HILL, H.; BALL, D. L.; SCHILING, S. G. Unpacking pedagogical content knowledge: conceptualizing and measuring teachers´topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in MathematicsEducation*, v. 39, n. 4, p. 372-400, 2008.

JOJOT, B. N. Identificación y análisis de los errores cometidos por los estudiantes de introducción a la matemática. In: REUNIÓN DE DIDACTICA DE LA MATEMÁTICA DEL CONO SUR, 8., 2009, Asunción. *Actas*... Asunción: CEMPA, 2009. 1 CD-ROM.

MANDARINO, M. C. F. A análise de soluções dos alunos na formação de professores que ensinam matemática. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 33., 2010, Caxambu. *Anais...* Disponível em: <http://33reuniao.anped.org.br/33encontro/app/webroot/files/file/Trabalhos%20em%20PDF/GT19-6989--Int.pdf >. Acesso em: 12 jan. 2017.

MOREIRA, P. C. 3+1 e suas (in) variantes: reflexões sobre as possibilidades de uma nova estrutura curricular na Licenciatura em Matemática. *Bolema,* v. 26, n. 44, p. 1137-1150, dez. 2012.

RESNICK, L. B.; FORD, W. W. *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos.*Barcelona: Paidós, 1990.

SHALEM, Y.; SAPIRE, I.; SORTO, M. A. Teachers´explanations of learners´errors in standardized mathematics assessments. *Pythagoras*, v. 35, n. 1, p. 1-11, 2014.

SHULMAN, L. S. Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986. Disponível em: <http://www.fisica.uniud.it/URDF/masterDidSciUD/materiali/pdf/Shulman_1986.pdf>. Acesso em: 12 jan.2017.

SPEER, N. M; KING, K. D; HOWELL, H. Definitions of mathematical knowledge for teaching: using these constructs in research on secondary and college mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, v. 18, n. 2, p. 105-122, 2015.